

Terbit online pada laman web jurnal : <http://jurnal.sttp-yds.ac.id>
SAINSTEK
(e-Journal)

| ISSN (Print) 2337-6910 | ISSN (Online) 2460-1039 |



Metode *Newton-Cotes* Tertutup Terkoreksi Berdasarkan Turunan Rata-Rata Aritmatika

Rike Marjulis^a, Muhammad Natsir^b

^a Sekolah Tinggi Teknologi Pekanbaru, Jl. Dirgantara, Pekanbaru 28294, Indonesia

^b Sekolah Tinggi Teknologi Pekanbaru, Jl. Dirgantara, Pekanbaru 28294, Indonesia

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:

Diterima Redaksi: 14 Juli 2021

Revisi Akhir: 12 Desember 2021

Diterbitkan Online: 15 Desember 2021

KATA KUNCI

Metode *Newton-Cotes*, Rata-rata aritmatika, Kuadratur.

KORESPONDENSI

Telepon: 0853-7625-3149

E-mail: rikemarjulis@gmail.com

ABSTRACT

Pada makalah ini dibahas metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika yang merupakan modifikasi dari metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi. Metode ini dimodifikasi dengan tujuan untuk memperoleh metode yang menghasilkan solusi hampiran yang mendekati solusi eksak dalam mengaproksimasi integral tentu. Bentuk eror diperoleh dengan menggunakan konsep ketelitian antara kuadratur dan nilai eksak. Selanjutnya hasil komputasi menunjukkan bahwa metode yang diajukan menghasilkan eror lebih kecil daripada metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi...

1. PENDAHULUAN

Integral tentu $I = \int_a^b f(x)dx$ dapat dihitung dengan menggunakan metode analitik yaitu Teorema dasar kalkulus

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

dengan $F(x)$ anti turunan dari $f(x)$. Penyelesaian dengan menggunakan metode analitik memberikan solusi eksak. Namun, tidak semua $f(x)$ memiliki anti turunan, sehingga digunakanlah pendekatan secara numerik yang dikenal sebagai integrasi numerik.

Proses integrasi numerik yang paling umum didasarkan pada mengaproksimasi $f(x)$ dengan interpolasi $P_n(x)$ sedemikian hingga diperoleh:

$$f(x) \approx P_n(x). \quad (2)$$

Selanjutnya dengan mengganti $f(x)$ dengan $P_n(x)$ di persamaan (2) ke persamaan (1) dan mengintegalkannya, sehingga diperoleh formulasi integrasi numerik atau yang

disebut juga metode numerik. Metode numerik yang banyak digunakan adalah metode *Newton-Cotes*. Berdasarkan Burden dan Faires [2] menjelaskan bahwa metode *Newton-Cotes* terbagi dua, yaitu metode *Newton-Cotes* terbuka dan metode *Newton-Cotes* tertutup.

Metode *Newton-Cotes* tertutup banyak dimodifikasi untuk memberikan solusi yang lebih baik dan eror yang lebih kecil, diantaranya diusulkan oleh Deghan *et.al.* [3] yaitu perbaikan aturan kuadratur dari metode *Newton-Cotes* tertutup dengan menambahkan variabel baru pada batas integrasinya. Sementara itu Ramachandran *et.al.* [5-8] berturut-turut menambahkan nilai turunan rata-rata geometri, harmonik, heronian, dan *root mean square*. Selanjutnya Ramachandran dan Parimala [4] memodifikasi metode *Newton-Cotes* tertutup dengan menambahkan nilai turunan rata-rata centroidal.

Pada makalah ini akan ditambahkan turunan rata-rata aritmatika pada metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh

metode yang menghasilkan ketelitian yang lebih baik dalam mengaproksimasi integral tentu.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Atkinson [1] menjelaskan bahwa metode *Newton-Cotes* tertutup terdiri dari beberapa aturan yaitu aturan trapesium, aturan Simpson $\frac{1}{3}$, aturan Simpson $\frac{3}{8}$, dan aturan *Boole*. Selanjutnya dengan melibatkan turunan di titik ujung interval pada metode *Newton-Cotes* tertutup diperoleh metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi yang memiliki bentuk umum sebagai berikut:

a. Aturan Trapesium Terkoreksi

(ATT)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12} [f'(b) - f'(a)]. \quad (3)$$

b. Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ Terkoreksi (AS1T)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^4}{2880} [f'''(b) - f'''(a)]. \quad (4)$$

c. Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ Terkoreksi (AS3T)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^4}{6480} [f'''(b) - f'''(a)]. \quad (5)$$

d. Aturan *Boole* Terkoreksi (ABT)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{90} \left[7f(a) + 32f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 32f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 7f(b) \right] - \frac{(b-a)^6}{1935360} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)]. \quad (6)$$

Selanjutnya Ramachandran et.al [5] menjelaskan bahwa ketelitian diperoleh dari bentuk umum error

$$E_n[f] = \frac{b^{p+2} - a^{p+2}}{(p+2)!},$$

dimana p merupakan ketelitian dari rumus kuadratur.

3. METODOLOGI

Ramachandran et.al [5] telah memodifikasi metode *Newton-Cotes* tertutup yang salah satunya adalah aturan trapesium. Aturan trapesium yang memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12} f''(\xi),$$

dengan $\xi \in [a, b]$. Aturan ini dimodifikasi dengan menambahkan nilai turunan rata-rata geometri sehingga mendapatkan bentuk umum sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12} f''(\sqrt{ab})$$

$$- \frac{(b-a)^3}{24} (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 f'''(\xi),$$

dengan $\xi \in [a, b]$. Selanjutnya dengan cara yang sama akan ditambahkan turunan rata-rata aritmatika pada Metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penurunan metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika serta ketelitian, orde dan bentuk error dibahas pada bagian ini.

4.1. Metode *Newton-Cotes* Tertutup Terkoreksi Berdasarkan Turunan Rata-Rata Aritmatika

4.1.1. Aturan Trapesium Terkoreksi Berdasarkan Turunan Rata-Rata Aritmatika (ATTA)

Pada bagian ini, error pada persamaan (3) akan dimodifikasi dengan menambahkan rata-rata aritmatika sehingga diperoleh

Teorema 1 Aturan trapesium terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata Aritmatika (ATTA)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12} [f'(b) - f'(a)] + \frac{(b-a)^5}{720} f^{(4)}\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (7)$$

Jadi derajat ketelitian aturan ini adalah 5.

Bukti: Persamaan (7) diverifikasi dengan $f(x) = x^5$ yang memiliki nilai eksak $\int_a^b x^5 dx = \frac{1}{6}(b^6 - a^6)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_a^b x^5 dx &= \frac{(b-a)}{2} [a^5 + b^5] - \frac{(b-a)^2}{12} [5b^4 - 5a^4] \\ &\quad + \frac{(b-a)^5}{720} (60a + 60b), \\ \int_a^b x^5 dx &= \frac{1}{6} (b^6 - a^6). \end{aligned} \quad (8)$$

Dari persamaan (8) terlihat bahwa solusi yang diperoleh eksak. Derajat ketelitian ATT 3 sedangkan derajat ketelitian ATTA adalah 5. ■

4.1.2 Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ Terkoreksi Berdasarkan Turunan Rata-Rata Aritmatika (AS1TA)

Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ terkoreksi pada persamaan (4) akan dimodifikasi dengan mengganti nilai $\xi = \left(\frac{a+b}{2}\right)$ sehingga diperoleh

Teorema 2 Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata Aritmatika (AS1TA)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^4}{2880} [f'''(b) - f'''(a)] + \frac{(b-a)^7}{96768} f^{(6)}\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (9)$$

Derajat ketelitian aturan ini adalah 7.

Bukti: Persamaan (9) diverifikasi dengan $f(x) = x^7$ yang memiliki nilai eksak $\int_a^b x^7 dx = \frac{1}{8}(b^7 - a^7)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_a^b x^7 dx &= \frac{(b-a)}{6} \left[a^7 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^7 + b^7 \right] - \frac{(b-a)^4}{2880} [210b^4 - 210a^4] \\ &\quad + \frac{(b-a)^7}{96768} (2520a + 2520b), \\ \int_a^b x^7 dx &= \frac{1}{8}(b^7 - a^7) \end{aligned} \quad (10)$$

Berdasarkan persamaan (10) solusi yang diperoleh eksak dengan derajat ketelitian AS1TA adalah 7 sedangkan derajat ketelitian AS1T adalah 5. ■

4.1.3 Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ Terkoreksi Berdasarkan Turunan Rata-Rata Aritmatika (AS3TA)

Nilai ξ pada aturan Simpson $\frac{3}{8}$ terkoreksi di persamaan (5) akan diganti dengan rata-rata aritmatika sehingga diperoleh

Teorema 3 Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika (AS3TA)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^4}{6480} [f'''(b) - f'''(a)] + \frac{(b-a)^7}{244944} f^{(6)}\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (11)$$

Derajat ketelitian aturan ini adalah 7.

Bukti: Persamaan (11) diverifikasi dengan $f(x) = x^7$ yang memiliki nilai eksak $\int_a^b x^7 dx = \frac{1}{8}(b^7 - a^7)$ maka diperoleh

$$\int_a^b x^7 dx = \frac{(b-a)}{8} \left[a^7 + 3\left(\frac{2a+b}{3}\right)^7 + 3\left(\frac{a+2b}{3}\right)^7 + b^7 \right] - \frac{(b-a)^4}{6480} [210b^4 - 210a^4] + \frac{(b-a)^7}{244944} (2520a + 2520b),$$

$$\begin{aligned} &+ b^7] - \frac{(b-a)^4}{6480} [210b^4 - 210a^4] \\ &+ \frac{(b-a)^7}{244944} (2520a + 2520b), \\ \int_a^b x^7 dx &= \frac{1}{8}(b^7 - a^7) \end{aligned} \quad (12)$$

Persamaan (12) menunjukkan solusi yang diperoleh eksak. Derajat ketelitian AS3TA ini adalah 7 sedangkan derajat ketelitian AS3T hanya 5. ■

4.1.4 Aturan Boole Terkoreksi Berdasarkan Turunan Rata-Rata Aritmatika (ABTA)

Jika nilai ξ pada persamaan (6) diganti dengan rata-rata aritmatika maka diperoleh aturan Boole terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika (ABTA) yaitu

Teorema 4 Aturan Boole terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika (ABTA)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{(b-a)}{90} \left[7f(a) + 32f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 32f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 7f(b) \right] - \frac{(b-a)^6}{1935360} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] \\ &\quad + \frac{(b-a)^9}{58982400} f^{(8)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

Aturan ini mempunyai ketelitian 9.

Bukti: Persamaan (13) diverifikasi dengan $f(x) = x^9$ yang memiliki nilai eksak $\int_a^b x^9 dx = \frac{1}{10}(b^9 - a^9)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_a^b x^9 dx &= \frac{(b-a)}{90} \left[7a^9 + 32\left(\frac{3a+b}{4}\right)^9 + 12\left(\frac{a+b}{2}\right)^9 + 32\left(\frac{a+3b}{4}\right)^9 + b^9 \right] - \frac{(b-a)^6}{1935360} [151200b^4 - 151200a^4] \\ &\quad + \frac{(b-a)^9}{58982400} [181440a + 181440b] \\ \int_a^b x^9 dx &= \frac{1}{10}(b^9 - a^9) \end{aligned} \quad (14)$$

Solusi yang diperoleh pada persamaan (14) adalah eksak. ABTA ini memiliki derajat ketelitian 9 sedangkan derajat ketelitian ABT adalah 7. ■

4.2. Analisis Error

Pada makalah ini eror metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata Aritmatika diperoleh dengan menggunakan ketelitian antara kuadratur monomial $\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$ dan nilai eksak $\frac{1}{(p+1)!} \int_a^b x^{p+1} dx = \frac{b^{p+2} - a^{p+2}}{(p+2)!}$ dimana p merupakan ketelitian dari rumus kuadratur.

4.2.1 Error Aturan Trapesium Terkoreksi Berdasarkan Turunan Rata-Rata Aritmatika

Teorema 5 Misalkan $f = [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu dan mempunyai turunan yang kontinu. Aturan trapesium terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12} [f'(b) - f'(a)] + \frac{(b-a)^5}{720} f^{(4)}\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

mempunyai bentuk error

$$E_n[f] = \frac{(b-a)^7}{40320} f^{(6)}(\xi), \text{ dengan } \xi \in [a, b]. \quad (15)$$

Bukti: Misalkan $f(x)$ pada persamaan (15) diverifikasi dengan $f(x) = \frac{x^6}{6!}$, dengan solusi eksak yaitu $\int_a^b \frac{x^6}{6!} dx = \frac{1}{5040} (b^7 - a^7)$. Selanjutnya dengan menggunakan aturan trapesium terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika diperoleh

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{x^6}{6!} dx &= \frac{(b-a)}{2} \left[\frac{a^6}{6!} + \frac{b^6}{6!} \right] - \frac{(b-a)^2}{12} \left[\frac{b^5}{120} - \frac{a^5}{120} \right] \\ &\quad + \frac{(b-a)^5}{1440} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2, \\ \int_a^b \frac{x^6}{6!} dx &= \frac{-a^7 - a^6 b + 3a^5 b^2 - 5a^4 b^3}{5760} + \frac{5a^3 b^4}{5760} - \frac{3a^2 b^5}{5760} \\ &\quad + \frac{ab^6}{5760} + \frac{b^7}{5760}, \end{aligned}$$

mempunyai bentuk error

$$E_n[f] = \text{solusi eksak} - ATTA$$

$$E_n[f] = \frac{(b-a)^7}{40320} f^{(6)}(\xi), \text{ dengan } \xi \in [a, b]. \quad \blacksquare$$

4.2.2 Error Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ Terkoreksi Berdasarkan Turunan Rata-Rata Aritmatika

Teorema 6 Misalkan $f = [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu dan mempunyai turunan yang kontinu. Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \\ &\quad - \frac{(b-a)^4}{2880} [f'''(b) - f'''(a)] \\ &\quad + \frac{(b-a)^7}{96768} f^{(6)}\left(\frac{a+b}{2}\right), \end{aligned}$$

diperoleh bentuk error

$$E_n[f] = \frac{37(b-a)^9}{232243200} f^{(8)}(\xi), \text{ dengan } \xi \in [a, b]. \quad (16)$$

Bukti: Misalkan $f(x)$ pada persamaan (16) diverifikasi dengan $f(x) = \frac{x^8}{8!}$, dengan solusi eksak yaitu $\int_a^b \frac{x^8}{8!} dx = \frac{1}{362880} (b^9 - a^9)$. Selanjutnya dengan menggunakan aturan Simpson $\frac{1}{3}$ terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika diperoleh

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{x^8}{8!} dx &= \frac{(b-a)}{6} \left[\frac{a^8}{8!} + \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^8}{10080} + \frac{b^8}{8!} \right] - \frac{(b-a)^4}{2880} \left[\frac{b^5}{120} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^5}{120} \right] + \frac{(b-a)^7}{193536} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2, \\ \int_a^b \frac{x^8}{8!} dx &= \frac{-67a^9}{25804800} - \frac{37a^8b}{25804800} + \frac{37a^7b^2}{6451200} - \frac{37a^6b^3}{2764800} \\ &\quad + \frac{37a^5b^4}{1843200} - \frac{37a^4b^5}{1843200} + \frac{37a^3b^6}{2764800} - \frac{37a^2b^7}{6451200} \\ &\quad + \frac{37ab^8}{25804800} + \frac{67b^9}{25804800}, \end{aligned}$$

diperoleh bentuk error

$$E_n[f] = \text{solusi eksak} - AS1TA$$

$$E_n[f] = \frac{37(b-a)^9}{232243200} f^{(8)}(\xi), \text{ dengan } \xi \in [a, b]. \quad \blacksquare$$

4.2.3 Error Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ Terkoreksi Berdasarkan Turunan Rata-Rata Aritmatika

Teorema 7 Misalkan $f = [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu dan mempunyai turunan yang kontinu. Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata Aritmatika

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{(b-a)}{8} \left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right] \\ &\quad - \frac{(b-a)^4}{6480} [f'''(b) - f'''(a)] \\ &\quad + \frac{(b-a)^7}{244944} f^{(6)}\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

Bentuk erornya yaitu

$$E_n[f] = \text{solusi eksak} - AS3TA$$

$$E_n[f] = \frac{59(b-a)^9}{881798400} f^{(8)}(\xi), \text{ dengan } \xi \in [a, b]. \quad (17)$$

Bukti: Misalkan $f(x)$ pada persamaan (17) diverifikasi dengan $f(x) = \frac{x^8}{8!}$, dengan solusi eksak yaitu $\int_a^b \frac{x^8}{8!} dx = \frac{1}{362880} (b^9 - a^9)$. Selanjutnya dengan menggunakan aturan Simpson $\frac{3}{8}$ terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika diperoleh

$$\int_a^b \frac{x^8}{8!} dx = \frac{(b-a)}{8} \left[\frac{a^8}{8!} + \frac{\left(\frac{2a+b}{3}\right)^8}{13440} + \frac{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^8}{13440} + \frac{b^8}{8!} \right]$$

$$\int_a^b \frac{x^8}{8!} dx = \frac{-(b-a)^4 \left[\frac{b^5}{120} - \frac{a^5}{120} \right] + \frac{(b-a)^7 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2}{489888} - \frac{2371a^9}{881798400} - \frac{59a^8b}{97977600} + \frac{59a^7b^2}{24494400} - \frac{59a^6b^3}{10497600} + \frac{59a^5b^4}{6998400} - \frac{59a^4b^5}{6998400} + \frac{59a^3b^6}{10497600} - \frac{59a^2b^7}{24494400} + \frac{59ab^8}{97977600} + \frac{2371b^9}{881798400}.$$

Bentuk erornya adalah

$$E_n[f] = \text{solusi eksak} - \text{AS3TA}$$

$$E_n[f] = \frac{59(b-a)^9}{881798400} f^{(8)}(\xi), \text{ dengan } \xi \in [a, b]. \quad \blacksquare$$

4.2.4 Error Aturan Boole Terkoreksi Berdasarkan Turunan Rata-Rata Aritmatika

Teorema 8 Misalkan $f = [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu dan mempunyai turunan yang kontinu. Aturan Boole terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{90} \left[7f(a) + 32f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 32f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 7f(b) \right] - \frac{(b-a)^6}{1935360} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] + \frac{(b-a)^9}{58982400} f^{(8)}\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

memiliki bentuk error

$$E_n[f] = \text{solusi eksak} - \text{ABTA}$$

$$E_n[f] = \frac{47(b-a)^{11}}{186856243200} f^{(10)}(\xi), \text{ dengan } \xi \in [a, b]. \quad (18)$$

Bukti: Misalkan $f(x)$ pada persamaan (18) diverifikasi dengan $f(x) = \frac{x^{10}}{10!}$, dengan solusi eksak yaitu $\int_a^b \frac{x^{10}}{10!} dx = \frac{1}{39916800} (b^{11} - a^{11})$. Selanjutnya dengan menggunakan aturan Boole terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika diperoleh

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{x^{10}}{10!} dx &= \frac{(b-a)}{90} \left[\frac{a^{10}}{10!} + \frac{\left(\frac{3a+b}{4}\right)^{10}}{113400} + \frac{\left(\frac{a+3b}{4}\right)^{10}}{302400} + \frac{\left(\frac{a+3b}{4}\right)^{10}}{113400} + \frac{b^{10}}{10!} \right] - \frac{(b-a)^6}{1935360} \left[\frac{b^5 - a^5}{120} \right] \\ &\quad + \frac{(b-a)^9}{117964800} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2, \\ \int_a^b \frac{x^{10}}{10!} dx &= \frac{-983a^{11}}{39636172800} - \frac{47a^{10}b}{16986931200} + \frac{47a^9b^2}{3397386240} - \frac{47a^8b^3}{1132462080} + \frac{47a^7b^4}{566231040} \\ &\quad - \frac{329a^6b^5}{2831155200} + \frac{329a^5b^6}{2831155200} - \frac{47a^4b^7}{566231040} + \frac{47a^3b^8}{1132462080} \end{aligned}$$

$$- \frac{47a^2b^9}{3397386240} + \frac{47ab^{10}}{16986931200} + \frac{b^{11}}{39636172800},$$

memiliki bentuk error

$$E_n[f] = \text{solusi eksak} - \text{ABTA}$$

$$E_n[f] = \frac{47(b-a)^{11}}{186856243200} f^{(10)}(\xi), \text{ dengan } \xi \in [a, b]. \quad \blacksquare$$

4.3. Hasil Komputasi Numerik

Pada bagian ini, nilai-nilai dari $\int_0^1 e^x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$, dan $\int_0^1 (1+x^8) dx$ diaproksimasi dengan menggunakan (ATT), (AS1T), (AS3T), (ABT), (ATTA), (AS1TA), (AS3TA), dan (ABTA) akan ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan ATT, AS1T, AS3T, ABT, ATTA, AS1TA, AS3TA dan ABTA.

Metode	Integral		
	$\int_0^1 e^x dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$	$\int_0^1 (1+x^8) dx$
	Error	Error	Error
ATT	2.33e-03	2.25e-03	2.78e-01
AS1T	1.73e-05	4.15e-05	5.85e-02
AS3T	6.84e-06	1.64e-05	2.33e-02
ABT	2.84e-08	1.68e-07	6.84e-04
ATTA	4.12e-05	1.02e-04	1.32e-01
AS1TA	2.64e-07	1.61e-06	6.42e-03
AS3TA	1.11e-07	6.78e-07	2.70e-03
ABTA	4.17e-10	6.29e-09	0.00e+00

Berdasarkan hasil komputasi yang ditunjukkan oleh Tabel 1, terlihat bahwa ATTA, AS1TA, AS3TA, dan ABTA menghasilkan error lebih kecil untuk ketiga contoh dibandingkan dengan error ATT, AS1T, AS3T, dan ABT. Misalnya untuk $\int_0^1 (1+x^8) dx$, ATTA, AS1TA, AS3TA berturut-turut menghasilkan error sebesar 1.32e-01, 6.42e-03, dan 2.70e-03, bahkan ABTA memiliki error 0.00e+00, sedangkan ATT, AS1T, AS3T, dan ABT menghasilkan error yang jauh lebih besar. Hal ini juga berlaku untuk $\int_0^1 e^x dx$ dan $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$. Ini menunjukkan ATTA, AS1TA, AS3TA, dan ABTA memiliki keakuratan yang baik.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Metode Newton-Cotes tertutup terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika diperoleh dari modifikasi metode Newton-Cotes tertutup terkoreksi dengan menambahkan turunan rata-rata aritmatika pada erornya.

Metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika memiliki ketelitian yang lebih tinggi daripada metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi.

Uji numerik menunjukkan bahwa metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika memiliki keakuratan yang baik dan lebih efisien dibandingkan dengan metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi. Jadi secara keseluruhan dapat disimpulkan metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika dapat dijadikan salah satu metode alternatif dalam menghitung integral tentu.

5.2 Saran

Pada makalah ini hanya dibahas modifikasi metode *Newton-Cotes* tertutup terkoreksi berdasarkan turunan rata-rata aritmatika. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan modifikasi metode integrasi numerik yang berbeda dengan menggunakan variasi rata-rata lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] K.E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis, Second Ed.*, Jhon Wiley Sons, New York, 1989.
- [2] R.L. Burden dan J.D. Faires, *Numerical Analysis, Ninth Edition.*, Brooks/Cole, Boston, 2010.
- [3] M. Deghan, M. Masjed-Jamei dan M.R. Eslahchi, *On Numerical Improvement of Closed Newton-Cotes Quadrature Rules*, Appl. Math. And Comput., Volume 165, 2005, pages 251-260.
- [4] T. Ramachandran dan R. Parimal, *Centroidal Mean Derivative-Based Closed Newton-Cotes Quadrature*, LJSR, Volume 5, 2016, pages 338-343.
- [5] T. Ramachandran, D. Udayakumar dan R. Parimala, *Geometric Mean Derivative-Based Closed Newton-Cotes Quadrature*, IJPEM, Volume 4, 2016, pages 107-116.
- [6] T. Ramachandran, D. Udayakumar dan R. Parimala, *Harmonic Mean Derivative-Based Closed Newton-Cotes Quadrature*, IOSR-JM, Volume 12, 2016, pages 36-41.
- [7] T. Ramachandran, D. Udayakumar dan R. Parimala, *Heronian Mean Derivative-Based Closed Newton-Cotes Quadrature*, IOSR-JM, Volume 7, 2016, pages 53-58.
- [8] T. Ramachandran, D. Udayakumar dan R. Parimala, *Root Mean Square Derivative-Based Closed Newton-Cotes Quadrature*, IOSR-Journal of Scientic and Research Publications, Volume 11, 2016, pages 9-13.
- [9] J. Stewart, *Calculus, Eight Edition*, Cengage Learning, Boston, 2015.