



Terbit online pada laman web jurnal :
<https://ejournal.sttp-yds.ac.id/index.php/js/index>

Sainstek
 (e-Journal)

ISSN (Print) 2337-6910 | ISSN (Online) 2460-1039 |



Faktorisasi Matriks Pascal dan Matriks Tetranacci

Mirfaturiq^a, Nurhasnah^b, Mohd. Bayu Baheramsyah^c

^{a,b,c}Sekolah Tinggi Teknologi Pekanbaru, Jl. Dirgantara, Pekanbaru, 28294, Indonesia

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:

Diterima Redaksi: 10 Juni 2023

Revisi Akhir: 30 Juni 2023

Diterbitkan Online: 30 Juni 2023

KATA KUNCI

Bilangan Pascal, Bilangan Tetranacci, Matriks Pascal, dan Matriks Tetranacci.

KORESPONDENSI

Telepon: 0821-7238-3318

E-mail: turiqamirfa@gmail.com

ABSTRACT

Matriks Pascal dinyatakan dengan P_n adalah matriks segitiga bawah dengan setiap entrinya merupakan bilangan pada segitiga Pascal. Selanjutnya, Matriks Tetranacci dinyatakan dengan M_n dengan setiap entrinya merupakan bilangan Tetranacci. Dalam artikel ini, membahas faktorisasi dari hubungan matriks Tetranacci dan matriks Pascal. Kemudian, dari hubungan dua matriks tersebut diperoleh sebuah matriks baru, yaitu matriks Q_n sehingga matriks Pascal dapat dinyatakan $P_n = Q_n M_n$.

1. PENDAHULUAN

Segitiga Pascal dapat dinyatakan dalam matriks persegi, dan setiap entrinya adalah bilangan segitiga Pascal sehingga disebut segitiga Pascal. Banyak artikel yang membahas tentang matriks Pascal, hubungan matriks matriks Pascal dengan Matriks Fibonacci. Brawer dan Pirovino [1] memberikan bentuk representasi matriks dari segitiga Pascal dan membahas tentang bentuk aljabar dari matriks Pascal. Kemudian Call dan Veleman [2] mendefinisikan matriks Pascal sebagai matriks segitiga bawah untuk setiap n bilangan asli yang dinyatakan dengan P_n .

Segitiga Pascal dan bilangan Fibonacci merupakan salah satu topik yang menjadi daya tarik beberapa penulis, karena hubungan antara segitiga Pascal dan bilangan Fibonacci diperoleh bahwa penjumlahan setiap entri-entri

pada segitiga Pascal menghasilkan bilangan Fibonacci. Pernyataan tersebut dipertegas oleh Varnadore [10], yang menyatakan bahwa dari hubungan antara bilangan Fibonacci dan segitiga Pascal diperoleh bahwa penjumlahan setiap entri-entri dari segitiga Pascal secara diagonal menghasilkan bilangan Fibonacci.

Ide yang sama pada segitiga Pascal, bilangan Fibonacci juga dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks persegi dengan setiap entrinya merupakan bilangan Fibonacci, sehingga matriks ini disebut dengan matriks Fibonacci. Lee et al. [5] mendefinisikan matriks Fibonacci sebagai matriks segitiga bawah dan matriks simetris dan dinyatakan dengan F_n . Kemudian, dari definisi matriks Fibonacci tersebut diperoleh bentuk faktorisasi dari matriks Fibonacci dan nilai-nilai eigen dari matriks simetris Fibonacci.

Hubungan matriks Pascal dan matriks Fibonacci telah diteliti oleh beberapa penulis dalam berbagai artikel. Lee et al. [6] membahas hubungan antara matriks Pascal dan matriks Fibonacci, Lee et al. [6], Zhang dan Wang [12] juga membahas hubungan antara matriks Pascal dan matriks Fibonacci, dengan memperoleh hasil yang berbeda.

Kemudian, Sabeth et al. [8] membahas hubungan matriks tribonacci dengan matriks Pascal dan memperoleh dua hasil yaitu pertama, dari hubungan dua matriks tersebut diperoleh matriks baru yaitu matriks R_n . Selanjutnya, dengan menggunakan matriks R_n diperoleh bahwa matriks Pascal P_n dapat dinyatakan dengan $P_n = T_n R_n$. Hasil kedua yang diperoleh dari hubungan dua matriks tersebut diperoleh matriks baru yaitu matriks A_n . Selanjutnya, dengan menggunakan matriks A_n diperoleh bahwa matriks Pascal P_n dapat dinyatakan dengan $P_n = A_n T_n$.

Mirfaturiga et al. [7] mendefinisikan matriks tetranacci M_n , dimana setiap entri matriks M_n merupakan bilangan tetranacci dan memperoleh hubungan matriks tetranacci dan matriks Pascal, hubungan matriks tersebut didefinisikan sebuah matriks baru E_n , sehingga matriks Pascal dapat dinyatakan dalam bentuk $P_n = M_n E_n$.

Pada artikel ini, membahas hubungan matriks Pascal dan matriks tetranacci yang merupakan lanjutan dari artikel Mirfaturiga [7], sehingga diperoleh faktorisasi dari matriks Pascal dan matriks tetranacci.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Matriks pascal adalah matriks segitiga bawah dengan setiap entri merupakan bilangan pada segitiga Pascal. Matriks Pascal didefinisikan sebagai berikut [2]

Definisi 1. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, matriks Pascal $n \times n$, $P_n = [p_{ij}]$ dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, didefinisikan sebagai,

$$p_{i,j} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & \text{jika } i \geq j, \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (1)$$

Barisan tetranacci merupakan generalisasi dari bilangan Fibonacci. Lee et al. [5] membentuk suatu matriks segitiga bawah yang entri-entrinya merupakan bilangan Fibonacci yang disebut dengan matriks Fibonacci. Dengan ide yang sama dari [5], barisan tetranacci juga dapat dinyatakan dalam bentuk matriks segitiga bawah dengan setiap entrinya merupakan bilangan tetranacci, sehingga

matriks ini disebut matriks tetranacci yang didefinisikan sebagai berikut [7],

Definisi 2. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, matriks Pascal $n \times n$, $M_n = [m_{ij}]$ dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, dapat dinyatakan dan didefinisikan sebagai

$$m_{i,j} = \begin{cases} M_{i-j+3}, & \text{jika } i \geq j, \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (2)$$

Matriks tetranacci M_n merupakan matriks segitiga bawah dengan diagonal utamanya adalah 1 dan nilai determinan dari matriks tetranacci M_n merupakan hasil perkalian entri-entri diagonalnya, sehinggaa diperoleh $\det(M_n) = 1$. Karena $\det(M_n) \neq 0$, maka matriks tetranacci memiliki invers. Bentuk umum dari invers matriks tetranacci $n \times n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan setiap entri dari invers matriks tetranacci $M_n^{-1} = [m'_{ij}]$ dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, dapat dinyatakan dan didefinisikan sebagai

$$m'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j, \\ -1, & \text{jika } i - 4 \leq j \leq i - 1, \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3)$$

3. METODOLOGI

Zhang dan Wang [12] membahas hubungan matriks Pascal dan matriks Fibonacci. Kemudian dari hubungan dua matriks tersebut diperoleh definisi matriks baru, misalkan matriks baru tersebut adalah matriks $K_n, \forall n \in \mathbb{N}$ yang didefinisikan sebagai matriks segitiga bawah berikut

Dari pendefinisian matriks K_n diperoleh teorema berikut.

Definisi 3. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, K_n adalah matriks $n \times n$ dengan setiap entri $K_n = [k_{ij}]$ dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, didefinisikan sebagai

$$k_{ij} = \binom{i-1}{j-1} - \binom{i-1}{j} - \binom{i-1}{j-1}. \quad (4)$$

Dari pendefinisian matriks K_n diturunkan beberapa teorema. selajutnya, dengan ide yang sama dari Zhang dan Wang [12], penulis membahas antara matriks tetranacci dan matriks Pascal.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan menggunakan ide dari Zhang dan Wang [12] dibentuk hubungan antara matriks tetranacci dan matriks Pascal. Kemudian, dari hubungan dua matriks tersebut diperoleh definisi matriks baru, misalkan matriks baru tersebut adalah matriks $Q_n, \forall n \in \mathbb{N}$ dan setiap entri dari matriks Q_n dinyatakan dengan q_{ij} .

Definisi 4. Untuk setiap $\forall n \in \mathbb{N}$, Q_n adalah matriks $n \times n$ dengan setiap entri $Q_n = [q_{ij}]$ dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, didefinisikan sebagai

$$q_{ij} = \binom{i-1}{j-1} - \binom{i-1}{j} - \binom{i-1}{j+1} - \binom{i-1}{j+2} - \binom{i-1}{j+3} \quad (5)$$

Dari definisi (5) maka diperoleh, $q_{11} = 1$, $q_{1j} = 0$, $\forall j \geq 2$; $q_{21} = 0$, $q_{22} = 1$, $q_{2j} = 0$, $\forall j \geq 3$; $q_{31} = -2$, $q_{32} = 1$, $q_{33} = 1$, $q_{3j} = 0$, $\forall j \geq 4$; dan $\forall i, j \geq 2$, $q_{ij} = -\frac{1}{24}(i^4 - 6i^3 + 23i^2 - 18i - 24)$.

Matriks Q_n merupakan matriks segitiga bawah dengan diagonal utamanya adalah 1 dan nilai determinan sari matriks Q_n merupakan hasil perkalian entri-entri diagonalnya, sehinggal diperoleh $\det(Q_n) = 1$. Karena $\det(Q_n) \neq 0$, maka matriks Q_n memiliki invers. Misalkan Q_n^{-1} adalah invers dari matriks Q_n dan setiap entrik dari matriks Q_n^{-1} dinyatakan sebagai q'_{ij} . Entri-entri dari matriks Q_n^{-1} diperoleh dari perkalian M_n dengan matriks P_n^{-1} . Misalkan untuk $n = 4$ diperoleh entir-entri untuk matriks Q_4^{-1} Sebagai berikut:

$$Q_4^{-1} = [q'_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Dengan memperhatikan setiap entri pada matriks (6) untuk $i > j$ semua nilai entri matriks tersebut didaftarkan seperti yang ditunjukkan pada Tabel 1

Selanjutnya dengan memperhatikan setiap langkah aljabar dari Tabel 1. Diperoleh bentuk umum matriks Q_n^{-1} berorde $n \times n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan Q_n^{-1} adalah unvers dari matriks Q_n setiap entri $Q_n^{-1} = [q'_{ij}]$ dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, didefinisikan sebagai

$$q'_{ij} = \sum_{k=j}^i (-1)^{j+k} \binom{k-1}{j-1} M_{i-k+3}. \quad (6)$$

Tabel 1. Nilai entri untuk matriks Q_n^{-1}

Entri matriks Q_n^{-1}	Nilai entri matriks Q_n^{-1}
q'_{11}	$M_{1-1+3}(-1)^{1+1} \binom{1-1}{1-1} = M_3 \binom{0}{0}$
q'_{21}	$M_{2-1+3}(-1)^2 \binom{1-1}{1-1} + M_{2-2+3}(-1)^3 \binom{2-1}{1-1}$ $= M_4 \binom{0}{0} - M_3 \binom{1}{0}$
q'_{22}	$M_{2-1+3}(-1)^3 \binom{1-1}{2-1} + M_{2-2+3}(-1)^4 \binom{2-1}{2-1}$ $= -M_4 \binom{0}{1} + M_3 \binom{1}{1} = M_3 \binom{1}{1}$
q'_{31}	$M_{3-1+3}(-1)^2 \binom{1-1}{1-1} + M_{3-2+3}(-1)^4 \binom{2-1}{1-1}$ $+ M_{3-3+3}(-1)^4 \binom{3-1}{1-1}$ $= M_5 \binom{0}{0} - M_4 \binom{1}{0} + M_3 \binom{2}{0}$
q'_{32}	$M_{3-1+3}(-1)^3 \binom{1-1}{2-1} + M_{3-2+3}(-1)^4 \binom{2-1}{2-1}$ $+ M_{3-3+3}(-1)^5 \binom{3-1}{2-1}$ $= -M_5 \binom{0}{0} + M_4 \binom{1}{1} - M_3 \binom{2}{1}$
$\vdots$	$\vdots$
q'_{ij}	$\sum_{k=j}^i (-1)^{j+k} \binom{k-1}{j-1} M_{i-k+3}$

Dari pendefinisian matriks Q_n yang didefinisikan pada persamaan (6) dapat diturunkan teorema berikut.

Teorema 1. Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan matriks Q_n yang didefinisikan pada persamaan (4), matriks Pascal yang didefinisikan pada persamaan (1) dan matriks tetranacci M_n yang didefinisikan pada persamaan (2), dapat dinyatakan $P_n = Q_n M_n$.

Bukti. Karena $\det(M_n) \neq 0$, maka matriks tetranacci M_n memiliki invers. akan dibuktikan bahwa

$$Q_n = P_n M_n^{-1}. \quad (7)$$

Kemudian perhatikan ruas kiri pada persamaan (7), untuk setiap $\forall i \geq 1$ dan $j = 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} q_{i1} &= -\frac{1}{24}(i^4 - 6i^3 + 32i^2 - 18i - 24), \\ &= \binom{i-1}{1-1}(1) + \binom{i-1}{2-1}(-1) + \binom{i-1}{3-1}(-1) + \binom{i-1}{4-1}(-1) \\ &\quad + \binom{i-1}{5-1}(-1) + \binom{i-1}{6-1}(0) + \cdots + \binom{i-1}{n-1}(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{i1} &= p_{i1}m'_{11} + p_{i2}m'_{21} + p_{i3}m'_{31} + p_{i4}m'_{41} + p_{i5}m'_{51} \\ &\quad + p_{i6}m'_{61} + \cdots + p_{in}m'_{n1}, \\ &= \sum_{k=1}^n p_{ik}m'_{k1}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, jika $\forall i \geq 1$ dan $\forall j \geq 2$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \binom{i-1}{j-1} - \binom{i-1}{j} - \binom{i-1}{j+1} - \binom{i-1}{j+2} - \binom{i-1}{j+3} \\ &\quad + \binom{i-1}{j-1}(1) + \binom{i-1}{j+1-1}(-1) + \binom{i-1}{j+2-1}(-1) + \\ &\quad + \binom{i-1}{j+3-1}(-1) + \binom{i-1}{j+4-1}(-1) + \\ &\quad + \binom{i-1}{j+5-1}(0) + \cdots + \binom{i-1}{n-1}(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{ij} &= p_{ij}m'_{jj} + p_{i(j+1)}m'_{(j+1)(j)} + p_{i(j+2)}m'_{(j+2)(j)} + \\ &\quad + p_{i(j+3)}m'_{(j+3)(j)} + p_{i(j+4)}m'_{(j+4)(j)} + \\ &\quad + p_{i(j+5)}m'_{(j+5)(j)} + \cdots + \\ &\quad + p_{in}m'_{nj}, \end{aligned}$$

$$q_{ij} = \sum_{k=j}^n p_{ik}m'_{kj}.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $P_n M_n^{-1} = Q_n$.

Jadi, dengan didefinisikan matriks Q_n pada persamaan (4), matriks Pascal pada persamaan (1) dan matriks tetranacci

M_n pada persamaan (2), dapat dinyatakan $P_n = Q_n M_n$. $\square$

Dari Teorema 1. sehingga diperoleh Akibat berikut.

Akibat 1. Untuk setiap $1 \leq k \leq n$ dan $n \geq j$ diperoleh

$$\binom{i-1}{j-1} = \sum_{k=i}^n \left[\binom{i-1}{k-1} - \binom{i-1}{k} - \binom{i-1}{k+1} - \binom{i-1}{k+2} - \binom{i-1}{k+3} \right] M_{k-j+3} \quad (8)$$

Bukti. Dengan memperhatikan setiap entri pada p_{nj} dalam perkalian matriks $P_n = Q_n M_n$ secara aljabar yang diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= q_{ik}m_{kj}, \\ &= q_{ii}m_{ij} + q_{i(i+1)}m_{(i+1)(j)} + q_{i(i+2)}m_{(i+2)(j)} + \\ &\quad + q_{i(i+3)}m_{(i+3)(j)} + q_{i(i+4)}m_{(i+4)(j)} + \cdots + q_{in}m_{nj}, \\ p_{ij} &= q_{ik}M_{i-j+3} + q_{i(i+1)}M_{(i+1)-j+3} + q_{i(i+2)}M_{(i+2)-j+3} + \\ &\quad + q_{i(i+3)}M_{(i+3)-j+3} + q_{i(i+4)}M_{(i+4)-j+3} + \cdots + \\ &\quad + q_{in}M_{n-j+3}, \\ p_{ij} &= q_{ii}M_{i-j+3} + q_{i(i+1)}M_{i-j+4} + q_{i(i+2)}M_{i-j+5} + \\ &\quad + q_{i(i+3)}M_{i-j+6} + q_{i(i+4)}M_{i-j+7} + \cdots + \\ &\quad + q_{in}M_{n-j+3} \\ p_{ij} &= \sum_{k=1}^n p_{ik}M_{k-j+3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (9) diperoleh

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \sum_{k=1}^n p_{ik}M_{k-j+3}, \\ \binom{i-1}{j-1} &= \sum_{k=i}^n \left[\binom{i-1}{k-1} - \binom{i-1}{k} - \binom{i-1}{k+1} - \binom{i-1}{k+2} - \binom{i-1}{k+3} \right] M_{k-j+3}. \end{aligned}$$

Jadi dengan menggunakan persamaan (9) dapat diturunkan persamaan (8). $\square$

Selanjutnya dari pendefinisian matriks Q_n^{-1} pada persamaan (6) dapat diturunkan teorema berikut.

Teorema 2. Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan matriks Q_n^{-1} yang didefinisikan pada persamaan (6), matriks Pascal yang didefinisikan pada persamaan (1) dan matriks tetranacci M_n yang didefinisikan pada persamaan (2), dapat dinyatakan $M_n = Q_n^{-1}P_n$.

Bukti. Karena $\det(P_n) \neq 0$, maka matriks Pascal P_n memiliki invers. akan dibuktikan bahwa

$$Q_n^{-1} = M_n P_n^{-1}. \quad (10)$$

Dengan memperhatikan ruas kiri pada persamaan (10), untuk setiap $i \geq 1$ dan $j \geq 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} q'_{ij} &= \sum_{k=j}^n M_{i-k+3} (-1)^{k+j} \binom{k-1}{j-1}, \\ &= M_{i-j+3} (-1)^{j+j} \binom{j-1}{j-1} + M_{i-(j+1)+3} (-1)^{(j+1)+j} \\ &\quad \binom{(j+1)-1}{j-1} + M_{i-(j+2)+3} (-1)^{(j+2)+j} \\ &\quad \binom{(j+2)-1}{j-1} + M_{i-(j+3)+3} (-1)^{(j+3)+j} \\ &\quad \binom{(j+3)-1}{j-1} + \dots + M_{i-n+3} (-1)^{n+j} \binom{n-1}{j-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'_{ij} &= m_{ij} p'_{jj} + m_{i(j+1)} p'_{(j+1)(j)} + m_{i(j+2)} p'_{(j+2)(j)} + \\ &\quad m_{i(j+3)} p'_{(j+3)(j)} + \dots + m_{in} p'_{nj}, \end{aligned}$$

$$q'_{ij} = \sum_{k=i}^n m_{ik} p'_{kj}.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $M_n P_n^{-1} = Q_n^{-1}$ jadi dengan didefinisikan matriks Q_n pada persamaan (5), matriks Pascal P_n pada persamaan (1) dan matriks tetranacci M_n pada persamaan (2) maka diperoleh $Q_n^{-1} = M_n P_n^{-1}$ $\square$

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Artikel ini, hanya membahas hubungan antara matriks tetranacci segitiga bawah dan matriks Pascal. Kemudian, dari hubungan kedua matriks tersebut diperoleh definisi matriks baru yaitu matriks Q_n . Selain itu, dari pendefinisian matriks Q_n diperoleh faktorisasi hubungan

matriks tetranacci dan matriks Pascal dalam dua teorema dan satu akibat. Kajian berikutnya dapat dilanjutkan untuk membahas hubungan matriks Pascal dengan matriks tetranacci segitiga atas, matriks tetranacci simetris dan generalisasi matriks tetranacci..

DAFTAR PUSTAKA

- [1] R. Brawer and M. Pirovino, "The linear algebra of the Pascal matrix." *Linear Algebra Applications*, Volume 174, 1992, Pages 13–23.
- [2] G. S. Call and D. J. Velleman, "Pascal's matrices." *The American Mathematical Monthly*, Volume 100, 1993, Pages 372–376.
- [3] S. Falcon, "The k-Fibonacci matrix and the Pascal matrix." *Central European Journal of Mathematics*, Volume 9, 2011, Pages 1403–1410.
- [4] M. Feinberg, "Fibonacci-tribonacci." *Fibonacci Quarterly*, Volume 1, 1963, Pages 70–74.
- [5] G. Y. Lee, J. S. Kim and S. G. Lee, "Factorizations and eigenvalues of Fibonacci and symmetric Fibonacci matrices." *Fibonacci Quarterly*, Volume 40, 2002, Pages 203–211.
- [6] G. Y. Lee, J. S. Kim and S. H. Cho, "Some combinatorial identities via Fibonacci numbers." *Discrete Applied Mathematics*, Volume 130, 2003, Pages 527–534.
- [7] Mirfaturiq, S. Gemawati and M. D. H. Gamal, "Tetranacci Matrix via Pascal's Matrix." *Bulletin of Mathematics*, Volume 9, 2017, Pages 1-7.
- [8] N. Sabeth, S. Gemawati dan H. Saleh, "A factorization of the tribonacci matrix and the Pascal matrix." *Applied Mathematical Sciences*, Volume 11, 2017, Pages 489–497.
- [9] M. N. Saveri and J. K. Patel, "Some properties of generalized tetranacci sequence modulo m." *International Journal of Computer and Mathematical Sciences*, Volume 4, 2015, Pages 58–64.
- [10] J. Varnadore, "Pascal's triangle and Fibonacci numbers." *The Mathematics Teacher*, Volume 84, 1991, Pages 314–316.
- [11] Z. Zhang, "The linear algebra of the generalized Pascal." *Linear Algebra and Its Applications*, Volume 250, 1997, Pages 51–60.

- [12] Z. Zhang dan X. Wang, “A factorization of the symmetric Pascal matrix involving the Fibonacci matrix.” *Discrete Applied Mathematics*, Volume 155, 2007, Pages 2371–2376.