Terbit *online* pada laman web jurnal :

https://ejournal.sttp-yds.ac.id/index.php/js/index

SAINSTEK

| ISSN (Print) 2337-6910 | ISSN (Online) 2460-1039 |

Hubungan Matriks Stirling Jenis Kedua dengan Matriks Tetranacci

Mirfaturiqa[a], Weriono[b], Fadhli Palaha[c]

[a,b]Program Studi Teknik Mesin,, Sekolah Tinggi Teknologi Pekanbaru, Jl. Dirgantara No.4, Pekanbaru, Indonesia

[c]Program Studi Teknik Elektro,, Sekolah Tinggi Teknologi Pekanbaru, Jl. Dirgantara No.4, Pekanbaru, Indonesia

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:
Diterima Redaksi: 30 November 2023
Revisi Akhir: 25 Desember 2023
Diterbitkan *Online*: 29 Desember 2023

KATA KUNCI

Bilangan Stirling jenis kedua,

Bilangan tetranacci,

Matriks Stirling jenis kedua,

Matriks Tetranacci.

KORESPONDENSI

Telepon: 0821-7238-3318

E-mail: turiqamirfa@gmail.com

A B S T R A C T

Matriks Stirling jenis kedua dinyatakan $S_n(2)$ dengan setiap entrinya bilangan Stirling jenis kedua. Selanjutnya, matriks Tetranacci dinyatakan dengan M_n dengan setiap entrinya bilangan Tetranacci. Dalam Artikel ini, membahas hubungan antara matriks Stirling jenis kedua dan matriks tetranacci. Kemudian, dari hubungan kedua matriks tersebut diperoleh sebuah matriks baru yaitu matriks A_n, sehingga matriks $S_n(2)$ dapat dinyatakan sebagai $S_n(2) = M_n A_n$

1. PENDAHULUAN

Bilangan Striling pertam kali dikemukan oleh James Stirling sekitar abad ke-18 (1692-1770). Bilangan Striling terbagi menjadi dua jenis yaitu bilangan Striling jenis pertama dan bilangan Striling Jenis kedua. Bona [1] mendefinisikan bilangan Stirling jenis kedua adalah banyaknya cara menyusun partisi suatu himpunan dengan n elemen ke dalam k himpunan bagian yang tidak kosong yang ditulis dengan $S(n, k)$.

Banyak penelitian tentang matriks Stirling, Comtet [3] mendefinisikan bilangan Stirling jenis kedua menjadi matriks Stirling jenis kedua yang dinyatakan dengan $S_n(2), \forall n \in N$ dengan setiap entir-entrinya merupakan bilangan Stirling jenis kedua. Cheon dan Kim [2] membahas hubungan matriks Stirling dengan matriks Pascal.

Rennie dan Dobson [8] membahas bilangan Striling jenis kedua, Lee et al. [4] membahas faktorisasi matriks Stirling dengan matriks Fibonacci. Rasmi et al. [7] membahas hubungan matruiks Stirling jenis kedua dan matriks tribonacci.

Barisan tetranacci adalah salah satu generalisasi dari barisan Fibonacci, Mirfaturiqa et al. [5] mendefinisikan matriks tetranacci M_n, dimana setiap entri matriks M_n merupakan bilangan tetranacci dan memperoleh hubungan matriks tetranacci dan matriks Pascal, hubungan matriks tersebut didefinisikan matriks baru E_n sehingga matriks Pascal dinyatakan dalam bentuk $P_n = M_n E_n$. Mirfaturiqa

https://doi.org/10.35583/js.v11i2.218

et al. [6] juga membahas faktorisasi matriks Pascal dan matriks Tetranacci, hasil faktorisasi dari kedua matriks tersebut, didefinisikan matriks baru yaitu matriks Q_n dan matriks Pascal dinyatakan $P_n = Q_n M_n$.

Dalam Artikel ini membahas hubungan matriks striling jenis kedua dan matriks tetranacci. Ide penelitian yang sama dengan Rasmi et al. [7] dapat didefinisikan sebuah matriks baru yaitu matriks A_n yang menyatakan hubungan matriks Stirling jenis kedua dan matriks tetranacci.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Dibagian ini akan diberikan definisi dari matriks Stirling jenis kedua dan matriks tetranacci. Bilangan Stirling jenis kedua $S(n,k)$ adalah banyaknya cara menyusun partisi suatu himpunan dengan n elemen ke dalam k himpunan bagian yang tidak kosong [1, hal.19] dengan Teorema berikut.

Teorema 1. Untuk Setiap bilangan asli n dan k dimana $n \geq k$ memenuhi hubungan rekursif berikut.

$$S(n,k) = \{S(n-1,k-1) + kS(k-1)\}$$

Bukti. Bukti teorema ini dapat dilihat dalam Bona [1, hal.19]

Bilangan Stirling jenis kedua dapat dinyatakan dalam bentuk matriks segitiga bawah dengan ukuran $n \times n$ dengan setiap entri-entrinya bilangan Stirling jenis kedua $S(i,j)$ yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1. Untuk Setiap bilangan asli n, matriks Stirling jenis kedua $n \times n$ dengan setiap entri $S_n(2) = [S_{ij}]$, $\forall\, i,j = 1,2,3,\cdots,n$ didefinisikan sebagai,

$$S_{ij} = \begin{cases} S(i,j) & jika\ i \geq j \\ 0 & lainnya \end{cases} \quad (1)$$

Barisan tetranacci merupakan generalisasi dari bilangan Fibonacci. Barisan tetranacci dapat dinyatakan dalam bentuk matriks segitiga bawah dengan setiap entrinya merupakan bilangan tetranacci, sehingga matriks ini disebut matriks tetranacci, Mirfaturiqa et al. [5] mendefinisikan matriks tetranacci sebagai berikut.

Definisi 2. Untuk setiap $n \in \mathrm{N}$, matriks tetranacci $n \times n$, $M_n = [m_{ij}]$ dengan $i, j = 1,2,3,\ldots,n$, dapat dinyatakan dan didefinisikan sebagai

$$m_{i,j} = \begin{cases} M_{i-j+3}, & \text{jika} \quad i \geq j, \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (2)$$

Matriks tetranacci M_n merupakan matriks segitiga bawah dengan diagonal utamanya adalah 1 dan nilai determinan dari matriks tetranacci M_n merupakan hasil perkalian entri-entri diagonalnya, sehinggan diperoleh $\det(M_n) = 1$. Karena $\det(M_n) \neq 0$, maka matriks tetranacci memliki invers. Bentuk umum dari invers matriks tetranacci $n \times n$ untuk setiap $n \in \mathrm{N}$ dengan setiap entri dari invers matriks tetrancci $M_n^{-1} = [m'_{ij}]$ dengan $i, j = 1,2,3,\ldots,n$, dapat dinyatakan dan didefinisikan sebagai

$$m'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Jika } i = j, \\ -1, & \text{jika } i-4 \leq j \leq i-1, \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3)$$

3. METODOLOGI

Rasmi et al [7] membahas hubungan matiks Stirling jenis kedua dan matriks tribonacci. Kemudian dari hubungan dua matriks tersebut diperoleh definisi matriks baru, misalkan matriks baru tersebut adalah matriks $D_n, \forall n \in N$ yang didefinisikan sebagai mstriks segitiga bawah berikut

Dari pendefinisian matriks D_n diperoleh teorema berikut.

Definisi 3. Untuk setiap $n \in \mathrm{N}$, D_n adalah matriks $n \times n$ dengan setiap entri $D_n = \lfloor d_{ij} \rfloor$ dengan $i, j = 1,2,3,\ldots,n$, didefinisikan sebagai

$$d_{ij} = S(i,j) - S(i-1,j) - S(i-2,j) - S(i-3,j) \quad (4)$$

Dari pendefinisan matriks D_n diturunkan beberapa teorema . selajutnya, dengan ide yang sama dari Rasmi et al. [7], penulis membahas antara matriks Stirling jenis kedua dan matriks tetranacci.

.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Ide yang sama dari Rasmi et al. [7] dibentuk hubungan antara matriks Stirling jenis kedua dan matriks Tetranacci. Kemudian, dari hubungan dua matriks tersebut diperoleh definisi matriks baru, misalkan matriks baru tersebut adalah matriks $A_n, \forall n \in N$ dan setiap entri dari matriks A_n dinyatakan dengan a_{ij}.

Definisi 4. Untuk setiap $\forall n \in N$, A_n adalah matriks $n \times n$ dengan setiap entri $A_n = [a_{ij}]$ dengan $i, j = 1,2,3,\ldots,n$, didefinisikan sebagai

$$a_{ij} = S(i,j) - S(i-1,j) - S(i-2,j) - S(i-3,j) - S(i-4,j) \quad (5)$$

Dari definisi (5) maka diperoleh, $a_{11} = 1$, $a_{1j} = 0$, $\forall j \geq 2$; $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, $a_{2j} = 0$, $\forall j \geq 3$; $a_{31} = -1$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = 1$, $q_{3j} = 0$, $\forall j \geq 4$; dan $\forall i, j \geq 2$, $a_{ij} = d_{(i-1)(j-1)} + d_{(i-1)(j)}$.

Matriks Q_n merupakan matriks segitiga bawah dengan diagonal utamanya adalah 1 dan nilai determinan sari matriks Q_n merupakan hasil perkalian entri-entri diagonalnya, sehinggan diperoleh $\det(Q_n) = 1$. Karena $\det(Q_n) \neq 0$, maka matriks Q_n memiliki invers. Misalkan Q_n^{-1} adalah invers dari matriks Q_n dan setiap entrik dari matriks Q_n^{-1} dinyatakan sebagai q'_{ij}. Entri-entri dari matriks Q_n^{-1} diperoleh dari perkalian M_n dengan matriks P_n^{-1}.

Dari pendefinisian matriks Q_n yang didefinisikan pada persamaan (5) dapat diturunkan teorema berikut.

Teorema 1. Misalkan untuk setiap $n \in \mathrm{N}$ dengan matriks A_n yang didefinisikan pada persamaan (5), matriks Stirling jenis kedua yang didefinisikan pada persamaan (1) dan matriks tetranacci M_n yang didefiniskan pada persamaan (2), dapat dinyatakan $S_n(2) = M_n A_n$.

Bukti. Karena $\det(M_n) \neq 0$, maka matriks tetranacci M_n memiliki invers. akan dibuktikan bahwa

$$M_n^{-1} S_n(2) = A_n \tag{7}$$

Memperhatikan sisi kiri persamaan (7), jika $\forall i = 1$ dan $\forall j \geq 2$, maka $m'_{ij} = m'_{1j}$. Kemudian $\forall i, j = 1$ diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} m'_{ik} S_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m'_{1k} S_{k1} = 1 = a_{11}$$

Jika $\forall i = 1$ dan $\forall j \geq 2$ maka $m'_{1j} = 0$ dan $S_{1j} = 0$. Kemudian $\forall i = 1$ dan $\forall j \geq 2$, diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} m'_{ik} S_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m'_{1k} S_{k1} = 0 = a_{1j}$$

Selanjutnya dari persamaan (5) dan (2) $\forall i \geq 5$ dan $\forall j \geq 2$ diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} m'_{ik} S_{kj} &= S(i,j) - S(i-1,j) - S(i-2,j) - \\ &\quad S(i-3,j) - S(i-4,j) \\ &= (1)S(i,j) + (-1)S(i-1,j) + (-1)(i-2,j) \\ &\quad (-1)S(i-3,j) + (-1)S(i-4,j) + \\ &\quad (0)S(i-5,j) + \cdots + (0)S(n,j) \\ &= a_{ij}\end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti bahwa $M_n^{-1} S_n(2) = A_n$.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Artikel ini , hanya membahas hubungan antara matriks Stirling jenis keduadan matriks tetranacci segitiga bawah. Kemudian, dari hubungan kedua matriks tersebut diperoleh definisi matriks baru yaitu matriks A_n. Selain itu, dari pendefinisan matriks A_n diperoleh faktorisasi hubungan matriksStirling jenis kedua dan matriks Tetranacci dalam satu teorema. Kajian berikutnya dapat dilanjutkan untuk membahas hubungan matriks Stirling jenis kedua dengan matriks tetranacci segitiga atas, matriks tetranacci simetris dan generalisasi matriks tetranacci..

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. Bona, A Walk Through Combinatorics, *World Scientific Publishing*, Singapore, (2006).

[2] G. S Cheon dan J. S. Kim, Stirling matrix via Pascal Matrix, *Linear Algebra and Its Applicatiuns*, 329(2001), 49-50.

[3] L. Comtet, Advamved Combinatorics, *Reidel Publishing Company*, Holand, (1974).

[4] G. Y Lee, J. S Kim and S. H Cho, Some combinatorial Identities via Fibonacci numbers, *Discrete Applied Mathematics*, 130 (2003), 527-534.

[5] Mirfaturiqa, S. Gemawati and M. D. H Gamal, Tetranacci Matrix via Pascal's Matrix. *Bulletin Of Mathematics*, Volume 7, 2017, Pages 1-7.

[6] Mirfaturiqa, Nurhasnah, dan M. B. Baheramsyah, Faktorisasi Matriks Pascal dan Mtriks Tetrananacci, *Jurnal Sainstek STTPekanbaru*, Volume 11. 2023, Pages 60-65.

[7] F. Rasmi, S. Gemawati, Kartini, M. D. H. Gamal, Relation Between Stirling's Numbers Of the Second Kind and Tribonacci Matrix, *Bulletin of Mathematics,* Volume 10, 2018, Pages 33-39.

[8] B.C Rennie And A. J. Dobson, On Stirling Numbers of the Second Kind, *Journal of Combinatorial Theory*, 7 (1969), 116-121.