

ANALISIS HUBUNGAN KETAKSAMAAN NILAI SINGULAR PADA PEMETAAN LINIER DAN RENTANG NUMERIK UNTUK FUNGSI EKSPONENSIAL MATRIKS

M.Natsir¹⁾, Asli Sirait²⁾, Musraini³⁾, Rolan Pane⁴⁾

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau
Corresponding author: natsir100@gmail.com

Abstrak

Suatu matriks kompleks M_n didefinisikan pada pemetaan linier $\Phi: X \rightarrow X + (\text{tr } X)I$ pada M_n . Diduga jika $\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$ semi definit positif untuk $A, X, B \in M_n$ maka $2s_j(\Phi(X)) \leq s_j(\Phi(A+B))$, $j = 1, \dots, n$ dan $s_j(\cdot)$ merupakan rata-rata dari nilai singular terbesar ke- j . Suatu eksponensial matriks A dinyatakan dalam bentuk $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ dan $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dan rentang numerik dari e^{At} didefinisikan dengan $W(E_A) = \{t \in \mathbb{C} : 0 \in F(e^{At})\}$ dan $E_A(t) = e^{At}$, $t \in \mathbb{C}$

Pada penelitian ini dianalisis sifat-sifat dasar dari $W(E_A)$, serta analisis kasus untuk A Hermitian

key words : ketaksamaan nilai singular, pemetaan linier

PENDAHULUAN

Matriks sebagai salah satu bahagian matematika mempunyai peran dan kontribusi dalam menyelesaikan berbagai persoalan baik dalam bidang matematika itu sendiri maupun dalam bidang disiplin ilmu lainnya dengan matriks dan sifat-sifatnya sebagai alat penyelesaian masalah tersebut,

Penelitian ini bersifat studi kepustakaan dan rencana kegiatan penelitian ini mendalami tentang hubungan ketaksamaan nilai singular pada pemetaan linier yang direpresentasikan dalam suatu bentuk: $\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$ yang merupakan matriks semi definit positif untuk setiap blok berukuran $n \times n$ yang pembuktiannya dengan menunjukkan pada pertaksamaan

$2s_j(\Phi(X)) \leq s_j(\Phi(A+B))$, $j = 1, \dots, n$ dengan $\Phi: X \rightarrow X + (\text{tr } X)I$ dan $s_j(\cdot)$ yang merupakan rata-rata nilai singular terbesar ke- j . Pada penelitian ini dibahas suatu matriks kompleks M_n berukuran $n \times n$ pada pemetaan $\Phi: X \rightarrow X + (\text{Tr } X)I$ diperoleh hubungan pada :

Dugaan 1. Jika $\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$, dimana $A, X, B \in M_n$, adalah semidefinit positif, maka

$$2s_j(\Phi(X)) \leq s_j(\Phi(A+B)), j = 1, \dots, n$$

Trace X dilambangkan dengan $\text{Tr } X$, transpos konjugat dari X adalah X^* . nilai singular dari X dinotasikan dengan $s_j(X)$, diurut sama. Untuk dua matriks hermitian X dan Y , kita tulis $X \geq Y$ atau $Y \leq X$ untuk mengartikan $X - Y$ adalah semidefinit positif dan mempunyai akar semidefinit positif tunggal dinotasikan dengan $X^{\frac{1}{2}}$ dan I berarti matriks identitas $n \times n$.

Eksponensial matriks merupakan deret dari fungsi eksponensial yang konstantanya diganti menjadi matriks A berukuran $n \times n$, sehingga terbentuklah deret matriks A berukuran $n \times n$. Suatu deret matriks dapat diperluas berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton yang menguraikan polinomial nilai eigen dari suatu matriks A kedalam bentuk polinomial matriks $A_{n \times n}$. Rentang numerik dari suatu matriks secara umum telah menjadi topik penelitian yang luas selama setiap dekade yang mengungkapkan banyak informasi tentang matriks. Rentang numerik $F(A)$ dari matriks $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ adalah himpunan kompak dan konvex

$$F(A) = \{x^*Ax \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_n\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\},$$

dengan $\|\cdot\|_2$ menunjukkan norm spektral matriks. Definisi untuk $F(A)$ dianalisis oleh Chorianopoulos et al (2010) dengan $F(A)$ memuat semua nilai eigen dari A .

Jika $P(\mu) = A_m \mu^m + A_{m-1} \mu^{m-1} + \dots + A_0$ adalah $n \times n$ matriks polinomial, maka rentang numerik dari $P(\mu)$ didefinisikan sebagai

$$W(P) = \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F(P(\mu))\}.$$

Untuk analisis fungsi dari matriks difokuskan pada fungsi eksponensial e^{At} , di mana $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dan $t \in \mathbb{C}$. Untuk $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, eksponensial dari A didefinisikan sebagai

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Penelitian ini bersifat studi literatur dengan menelusuri lebih mendalam dari hasil penelitian yang ditulis oleh Lin (2016) dalam penelitian yang berjudul *Ketaksamaan Nilai Singular Terkait Peta Linier* dan pendalaman hasil penelitian oleh Chorianopoulos dan Guo (2016) tentang *Rentang Numerik Untuk Fungsi Eksponensial Matriks* dan kelanjutan dari hasil penelitian dari peneliti tentang metode alternatif untuk penyelesaian sistem $x' = Ax$.

Kajian Literatur dan Perumusan Masalah

Keterkaitan ketaksamaan nilai singular pada pemetaan linier memenuhi hubungan yang dinyatakan dalam lema berikut :

Lemma 2.1 [4, h. 75]. Misal $M, N \in M_n$, $s_j(M+N) \leq s_j(M) + s_1(N)$, $j = 1, \dots, n$

Lemma 2.2 [4, h. 262]. Misal $M, N \in M_n$, $2s_j(M^*N) \leq s_j(MM^* + NN^*)$, $j = 1, \dots, n$ adalah sebuah kontraksi jika $I \geq C^*C$

Lemma 2.3 (Apostol, 1969).

Jika $\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$, dimana $A, X, B \in M_n$, adalah semidefinit positif, maka terdapat kontraksi C sehingga $X = A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}$.

Lema berikutnya merupakan Lema tambahan.

Lemma 2.4 Misal $M, N \in M_n$,

$$\lambda_j(M^*M + N^*N) \leq \lambda_j(MM^* + NN^*) + \lambda_1(M^*M), j = 1, \dots, n$$

Dibagian ini dijelaskan pengertian nilai eigen dan vektor eigen untuk menjelaskan teorema Cayley-Hamilton.

Definisi 1 (Petersen, 2012)

Skalar λ disebut nilai eigen, bila persamaan linier $AX = \lambda x$ untuk $x \neq 0$ dengan matriks A $n \times n$ dan X adalah vektor eigen. Selanjutnya dapat dibentuk $(\lambda I - A)X = 0$ dan $\det(\lambda I - A) = 0$, diperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (1)

Definisi 2 (Petersen, 2012)

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A ordo $n \times n$, maka dapat dibentuk polinomial nilai eigen,

$$P(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 \quad (2)$$

Teorema 1 (Petersen, 2012)

Misalkan A matriks $n \times n$ dan $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigennya. Dan Jika polinomial nilai eigen matriks A : $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \lambda^n$ maka diperoleh $P(\lambda) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + A^n = 0$ (3)

Teorema 2 (Chorianopoulos et al, 2010)

Jika A matriks konstan $n \times n$ konstan dengan polinomial karakteristik $P(\lambda)$, maka eksponensial matriksnya adalah:

$$e^{At} = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \dots + x_n(t)A^{(n-1)}$$

$$\text{dengan, } \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = B_0^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

B_0 adalah matriks untuk $t = 0$ dan $S = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ merupakan basis solusi sistem persamaan differensial homogen yang persamaan karakteristiknya adalah persamaan karakteristik dari matriks A dengan $p(\lambda) = 0$.

Penelusuran literatur tentang materi yang berkaitan dengan eksponen matriks memberikan informasi yang diperlukan dalam menganalisis perumusan dari eksponen matriks baik dari segi penelaahan nilai eigen dari matriks A tersebut maupun tinjauan tentang solusi dari sistem persamaan diferensial linier yang dibangun oleh A $n \times n$ sebagai matriks koefisien sistem linier tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil dan pembahasan pada bagian ini berisikan ketaksamaan nilai eigen Weyl dan ketaksamaan nilai singular blok matriks semi definit positif

1. Ketaksamaan nilai eigen Weyl

Ketaksamaan nilai eigen Weyl (Bhatia, 2007) menyatakan jika X, Y adalah matriks Hermitian, maka

$$\lambda_j(X+Y) \leq \lambda_1(X) + \lambda_j(Y), j = 1, \dots, n$$

Sebagai $N^*N = U^*NN^*U$ untuk suatu matriks kesatuan

$$U, M^*M + N^*N = M^*M + U^*NN^*U \\ \leq M^*M + U^*(MM^* + NN^*)U$$

Dugaan 1:

Untuk $M, N \in M_n$,

$$\lambda_j(M^*M + N^*N) \leq \lambda_j(MM^* + NN^*) \\ + \frac{1}{2} \text{Tr}(M^*M + N^*N - M^*N - N^*M)$$

Bukti : Penggantian M, N dengan $M - N, M + N$, pada Lemma 2.4

$$\lambda_1(M^*M + N^*N) \leq \lambda_1(MM^* + NN^*) \\ + \frac{1}{2} \lambda_1((M - N)^*(M - N))$$

Tapi $(M - N)^*(M - N) \geq 0$, ini mengimplikasikan

$$\lambda_1((M - N)^*(M - N)) \leq \text{Tr}((M - N)^*(M - N)) \\ = \text{Tr}(M^*M + N^*N - M^*N - N^*M)$$

Untuk setiap j .

$$s_j(A + B + (\text{Tr}(A + B))I) \\ = \lambda_j(A + B) + \text{Tr}(A + B)$$

Dengan menggunakan Lemma 2.1 dan Lemma 2.3 untuk menunjukkan kontraksi C diperoleh

$$2 \left(s_j \left(A^{\frac{1}{2}} C B^{\frac{1}{2}} \right) + \left| \text{Tr} A^{\frac{1}{2}} C B^{\frac{1}{2}} \right| \right) \\ \leq \lambda_j(A + B) + \text{Tr}(A + B)$$

Dari persamaan $M = C^*A^{\frac{1}{2}}, N = B^{\frac{1}{2}}$ pada Lemma 2.2 diperoleh

$$2s_j \left(A^{\frac{1}{2}} C B^{\frac{1}{2}} \right) \leq \lambda_j(C^*AC + B)$$

Maka ketaksamaan (lemma 2.1) terbukti dari

$$\lambda_j(C^*AC + B) - \lambda_j(A + B) \\ \leq \text{Tr}(A + B) - 2 \left| \text{Tr} A^{\frac{1}{2}} C B^{\frac{1}{2}} \right|$$

Misalkan $M = A^{\frac{1}{2}}C, N = B^{\frac{1}{2}}$ pada dugaan 1 diperoleh

$$\lambda_j(C^*AC + B) - \lambda_j \left(A^{\frac{1}{2}} C C^* A^{\frac{1}{2}} + B \right) \\ \leq \frac{1}{2} \text{Tr} (C^*AC + B - C^*A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}C) \\ \leq \text{Tr}(C^*AC + B - C^*A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}C) \\ = \text{Tr}(C^*AC + B) - 2\text{Tr}A^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}$$

Karena C adalah kontraksi sehingga $A^{\frac{1}{2}}CC^*A^{\frac{1}{2}} \leq A$ memenuhi persamaan

$$\lambda_j(A^{\frac{1}{2}}CC^*A^{\frac{1}{2}} + B) \leq \lambda_j(A + B)$$

untuk mengkonfirmasi dugaan 1.

2. Ketaksamaan Nilai Singular Block Matriks Semi Definit Positif

Diketahui ketaksamaan rata-rata aritmatika dan geometri untuk nilai singular dalam bentuk $2\sigma_j(AB^*) \leq \sigma_j(A^*A + B^*B)$, $j = 1, 2, \dots, n$ (Bhatia dan Kittaneh, 2008)

Untuk suatu $A, B \in M_n$ telah dibuktikan (Zhang, 2005) dimana

$\sigma_j(A - B) \leq \sigma_j(A \oplus B)$, $j = 1, 2, \dots, n$ untuk matriks semi definit positif A, B, M_n dan

$$2\sigma_j(K) \leq \sigma_j \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, r \quad (4)$$

Untuk suatu block matriks semi definit positif $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$, dimana $M \in M_m, N \in M_n, r = \min\{m, n\}$.

Zhang (2005) menunjukkan nilai singular dari block matriks semi definit positif bahwa jika A, B dan C merupakan matriks kompleks sedemikian hingga $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$, dimana A berukuran $m \times m$, C berukuran $n \times n$, B berukuran $m \times n$, and $\text{rank } B = r$, maka $\log \sigma(B) \prec_w \log \mu$ dimana $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ dengan $\mu_i = \max\{\lambda_i(A), \lambda_i(C)\}$ jika $\lambda_i \geq 0$ untuk lainnya $\sigma(B) \prec_w \mu$, selanjutnya misalkan A, B dan C merupakan matriks persegi yang mempunyai orde sama maka

$$\log |\lambda(B)| \prec_w \log \mu$$

Ketaksamaan nilai singular dari block matriks 2×2 dengan menggunakan operator jumlah langsung dari matriks semi definit positif memenuhi

$$\sigma_j(A \oplus C) - \sigma_1(B) \leq \sigma_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \\ \leq \sigma_j(A \oplus C) + \sigma_1(B) \quad (5)$$

Untuk suatu block matriks semi definit $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$,
where $A \in M_m$, $C \in M_n$, $r = \min \{m, n\}$

$$\sum_{j=1}^k \sigma_j(A \oplus C) - \sigma_j(B) \leq \sum_{j=1}^k \sigma_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \leq \sigma_j(A \oplus C) + \sigma_j(B), j = 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

Untuk suatu block matriks semi definit $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$,
dimana A, B , dan C matriks persegi berukuran $n \times n$ memenuhi hubungan

$$\frac{1}{2} \sigma_j(A + B + B^* + C) \leq \sigma_j \begin{pmatrix} A & C \\ B^* & D \end{pmatrix} \quad j=1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \sigma_j(A + C - (B + B^*)) \leq \sigma_j \begin{pmatrix} A & C \\ B^* & D \end{pmatrix} \quad j=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Untuk suatu block matriks semi definit $\begin{pmatrix} A & C \\ B^* & D \end{pmatrix}$ dimana A, B , dan C matriks persegi berukuran $n \times n$ diperoleh hubungan jika $A_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, maka

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_j(\sum_{i=1}^n A_i) \leq \sigma_j(\oplus_{i=1}^n A_i), j=1, 2, \dots, n \quad (9)$$

lemma 3.1

Jika $X_1 \geq X_2 \geq X_3 \dots \geq X_n \geq 0$
dan $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \dots \geq 0$

memenuhi

$$\prod_{i=1}^k x_i \leq \prod_{i=1}^k y_i, k = 1, 2, \dots, n \text{ Maka } \sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i, k = 1, 2, \dots, n$$

lemma 3.2 Misalkan $A, B \in M_n$ merupakan matriks Hermitian, Maka $\lambda(A + B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$

lemma 3.3 Jika $A, B \in M_n$ merupakan matriks Hermitian, Maka $\lambda(A) - \lambda(B) \leq \lambda(A - B)$

lemma 3.4 Misalkan A dan B merupakan matriks kompleks berukuran $m \times n$, maka $\sigma(A + B) \leq \sigma(A) + \sigma(B)$

lemma 3.5 Misalkan A dan B merupakan matriks semi definit positif berukuran sama, maka $\log \sigma(A - B) \leq \log \sigma(A + B)$

Sebagai konsekwensinya $\sigma(A - B) \leq \sigma(A + B)$ Jadi $\|A - B\|_{ul} \leq \|A + B\|_{ul}$

3. Eksponensial Matriks

Perumusan tentang eksponensial dari suatu matriks persegi sebelumnya dijabarkan melalui perluasan fungsi matriks A yang mempunyai eigen value $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ yang diformulasikan dalam bentuk:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^n Z_k e^{\lambda_k t} \quad \text{dan}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 = \sum_{k=1}^n Z_k e^{\lambda_k t} x_0$$

$$\text{dengan } Z_0 = \prod_{j=1, j \neq k} \frac{(A - \lambda_j I)}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

Sebagai ilustrasi, Selesaikan persamaan

$$x' = Ax, \text{ dengan } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, menghasilkan $\lambda = \{-1, -2\}$ maka

$$Z_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix};$$

$$Z_1 x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Sehingga penyelesaian dari persamaan $x' = Ax$ adalah

$$x(t) = \sum_{k=1}^2 Z_k e^{\lambda_k t} x_0 = e^{-t} Z_1 x_0 + e^{-2t} Z_2 x_0 \\ = e^{-t} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Jika dibandingkan dengan cara biasa, dari nilai eigen $\lambda = \{-1, -2\}$ diperoleh matriks P yang dibentuk oleh eigenvektor $[v_1, v_2]$,

$$\text{sehingga } P = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ diperoleh}$$

hubungan $Z_1 x_0 = c_1 v_1$ dan $Z_2 x_0 = c_2 v_2$

Jadi solusi persamaan adalah

$$x(t) = P e^{At} P^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

4. Rentang Numerik

Rentang numerik $F(A)$ dari matriks $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ adalah himpunan kompak dan konvex

$$F(A) = \{x^*Ax \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_n\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\},$$

dengan $\|\cdot\|_2$ menunjukkan norm spektral matriks

Definisi untuk $F(A)$ dianalisis serta $F(A)$ memuat semua nilai eigen dari A (Chorianopoulos et al, 2010). Jika

$P(\mu) = A_m \mu^m + A_{m-1} \mu^{m-1} + \dots + A_0$ adalah $n \times n$ matriks polinomial, maka rentang numerik dari $P(\mu)$ didefinisikan sebagai

$$W(P) = \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F(P(\mu))\}.$$

Untuk analisis fungsi dari matriks difokuskan pada fungsi eksponensial e^{At} , di mana $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dan $t \in \mathbb{C}$

Untuk $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, eksponensial dari A didefinisikan sebagai $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$,

Rentang Numerik pada operator T merupakan himpunan bagian dari bilangan kompleks $\mathbb{C}$ yang didefinisikan dalam bentuk :

$$W(T) = \{(Tx, x), x \in H, \|x\| = 1\}$$

Sifat-sifat dari $W(T)$ memenuhi :

$$W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T), \text{ untuk } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$W(T^*) = \{\bar{\sigma}, \sigma \in W(T)\},$$

$$W(U^*TU) = W(T) \text{ untuk suatu matriks}$$

Unitary U .

Sebagai ilustrasi, Misalkan matriks A ditransformasi :

$\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ yang direpresentasikan oleh

$$A = \begin{bmatrix} r & b \\ 0 & -r \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$$

Dan misalkan (f, g) merupakan vektor satuan dalam $\mathbb{C}^2$, $f = e^{i\alpha} \cos \theta$, $g = e^{i\beta} \sin \theta$

$$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \beta \in [0, 2\pi]$$

Diperoleh:

$$Af = (r e^{i\alpha} \cos \theta + b e^{i\beta} \sin \theta, -r e^{i\beta} \sin \theta)$$

Dan

$$(Af, f) = r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + b e^{i(\beta - \alpha)} \sin \theta \cos \theta$$

$$= x + iy$$

$$x = r \cos 2\theta + \frac{|b|}{2} \sin 2\theta \cos(\beta - \alpha + \gamma)$$

$$y = \frac{|b|}{2} \sin 2\theta \cos(\beta - \alpha + \gamma) \sin 2\theta, \gamma = \arg b.$$

Diperoleh persamaan:

$$(x - r \cos 2\theta)^2 + y^2 = \frac{|b|^2}{4} \sin^2 \theta, \text{ dengan } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Yang merupakan himpunan lingkaran

$$(x - r \cos 2\theta)^2 + y^2 = \frac{|b|^2}{4} \sin^2 2\theta.$$

Diferensialkan ke w.r.t θ , diperoleh :

$$(x - r \cos \theta)r = \frac{|b|^2}{4} \cos \theta.$$

Dengan mengeliminasi kedua persamaan

$$\text{diperoleh : } \frac{x^2}{r^2 + \left(\frac{|b|^2}{4}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{|b|^2}{4}\right)} = 1$$

Yang merupakan ellips dengan pusat 0, sumbu minor b dan sumbu mayor $\sqrt{4r^2 + b^2}$

Perumusan tentang rentang numerik matriks eksponensial ditelaah berdasarkan definisi berikut :

Untuk suatu $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, misalkan $E_A(t) = e^{At}$, $t \in \mathbb{C}$, rentang numerik dari $E_A(t)$ didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3 (Li dan Rodman, 1997)

Rentang numerikal dari $E_A(t)$ adalah

$$W(E_A) = \{t \in \mathbb{C} : 0 \in F(e^{At})\} \quad (10)$$

dan memenuhi :

$$W(E_A) = \left\{ t \in \mathbb{C} : x^* e^{At} x = 0, \text{ untuk suatu } x \neq 0 \text{ dan } x \in \mathbb{C}^n \right\}$$

$$= \{t \in \mathbb{C} : \|e^{At} - \lambda I_n\|_2 \geq |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\}. \quad (11)$$

Teorema 3. Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. maka $W(E_A)$ tidak kosong jika dan hanya jika A bukan matriks skalar.

Bukti: Jika A adalah matriks skalar ($A = cI_n$ untuk suatu c kompleks), maka $W(E_A)$ adalah kosong karena $F(e^{At}) = \{e^{ct}\}$ dan jelas $\{e^{ct}\} \neq 0$. Misalkan A bukan matriks skalar, Akan ditunjukkan $W(E_A)$ tidak kosong dengan induksi pada ukuran n dari A .

Ambil U suatu matriks unitary sedemikian hingga $A = U^* R U$ dan R adalah matriks segitiga atas. Diperoleh $e^{At} = U^* e^{Rt} U$, sedemikian hingga $F(e^{At}) = F(e^{Rt})$ untuk setiap $t \in \mathbb{C}$. Oleh karena itu $W(E_A) = W(E_R)$. Sehingga A merupakan matriks segitiga atas.

Misalkan A matriks kompleks 2×2 , $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, diperoleh

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \alpha \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \text{ dengan}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$; jika $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\text{maka } e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t} \alpha t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Jika A memiliki dua nilai eigen yang berbeda maka $F(e^{At})$ adalah konvex untuk semua t , itu sudah cukup untuk menunjukkan bahwa selalu ada t kompleks yang menghubungkan segmen garis $e^{\lambda_1 t}$ dan $e^{\lambda_2 t}$ melalui titik 0 atau dengan kata lain untuk suatu $\alpha t \in \mathbb{C}$ sedemikian hingga $\rho \in (0,1)$ maka

$$\rho e^{\lambda_1 t} + (1-\rho)e^{\lambda_2 t} = 0,$$

Atau $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = -\frac{1-\rho}{\rho}$, sehingga

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t - (2k+1)\pi i} = -\frac{1-\rho}{\rho}, \text{ di mana } k \in \mathbb{Z}. \text{ Oleh}$$

karena itu, dapat dipilih t sehingga

$$t = \frac{\ln \frac{1-\rho}{\rho} + (2k+1)\pi i}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (12)$$

Jika $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, maka

$$F(e^{At}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - e^{\lambda t}| \leq \left| \frac{\alpha t}{2} \right| e^{\lambda t}\}$$

Jadi, $0 \in F(e^{At})$ jika dan hanya jika $|t| \geq \frac{2}{|\alpha|}$.

Oleh karena itu $W(E_A) = \{t \in \mathbb{C} : |t| \geq \frac{2}{|\alpha|}\}$.

Misalkan $W(E_A) \neq \emptyset$ untuk setiap matriks segitiga atas A berukuran $k \times k$, dengan $k \geq 2$. Jadi terdapat $t_0 \in \mathbb{C}$ sedemikian hingga $x_0^* e^{At_0} x_0 = 0$ untuk suatu $x_0 \neq 0, x_0 \in \mathbb{C}^k$.

Untuk setiap $(k+1) \times (k+1)$ matriks segitiga atas A , Terdapat tiga kemungkinan:

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A} & y \\ 0 & \xi \end{bmatrix}, \text{ atau } A = \begin{bmatrix} \xi & y^T \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix},$$

$$\text{atau } A = \begin{bmatrix} \lambda & & & \alpha \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{dimana}$$

$y \in \mathbb{C}^k, \xi \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$, dan $\hat{A}$ matriks segitiga atas berukuran $k \times k$.

Sifat – Sifat $W(E_A)$

Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, rentang numerik A didefinisikan dengan $W(A) = \{x^* A x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}$.

Teorema 4. Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta.$$

$$W(U^* A U) = W(A) \text{ untuk setiap Unitary}$$

$$U \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Misalkan

$$k \in \{1, \dots, n-1\} \text{ dan } X \in \mathbb{C}^{n \times k} \text{ memenuhi } X^* X = I_k.$$

$$\text{Maka } W(X^* A X) \subseteq W(A).$$

Sifat dan karakteristik menggambarkan interaksi antara sifat-sifat geometris dari $W(A)$ dan sifat-sifat aljabar $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. (Lin, 2014)

Teorema 5. Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

$$A = \lambda I \text{ jika dan hanya jika } W(A) = \{\lambda\}.$$

$$A = A^* \text{ jika dan hanya jika } W(A) \subseteq \mathbb{R}.$$

$$A = A^* \text{ adalah definit positif jika dan hanya jika } W(A) \subseteq (0, \infty).$$

$$A = A^* \text{ adalah semidefinite positif jika dan hanya jika } W(A) \subseteq [0, \infty).$$

Rentang numerik dari matriks Hermitian H adalah interval tertutup pada sumbu real, yang titik akhir dibentuk oleh eigen ekstim H .

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \text{ dengan } a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

karena $\Phi(H, x) \equiv x^* H x \equiv \sum_{v=1}^n a_v x_v \bar{x}_v$.

misalkan x menjadi vektor dengan komponen riil $\xi_1, \dots, \xi_n$ dengan $\xi_v^2 = 1$. Maka

$\Phi(H, x) = \sum_{v=1}^n a_v \xi_v^2$. $\Phi(H, x)$ mengasumsikan nilai eigen ekstim $a_1, \dots, a_n$ dari matriks diagonal H hanya untuk vektor eigen

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sembarang Unitary } U$$

dari persamaan yang ekuivalen

$$Hx = \alpha x, \quad (U^* H U) U^* x = \alpha U^* x$$

Nilai eigen ekstim $U^* H U$ diasumsikan hanya untuk vektor eigen dalam fungsi $\Phi(U^* H U, x)$.

Untuk setiap matriks kompleks A dapat dibagi menjadi dua komponen sehingga

$$A = H_1 i H_2,$$

dimana H_1 dan H_2 adalah matriks Hermitian yang berhubungan dengan A :

$$H_1 = \frac{A + A^*}{2}, \quad H_2 = \frac{A - A^*}{2i}$$

Dari ini diperoleh

$$\Phi(A, x) = \Phi(H_1, x) + i\Phi(H_2, x).$$

Dimana $\Phi(H_1, x)$ dan $\Phi(H_2, x)$ adalah komponen riil untuk setiap vektor x .

Teorema 6. Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bukan matriks skalardan $t \in W(E_A)$ maka

$$|t| \geq \frac{\ln 2}{\inf_{k \in \mathbb{C}} \|A - kI_n\|_2} \quad (13)$$

Bukti.

Karena $t \in W(E_A)$,

$\|e^{At} - \lambda I_n\|_2 \geq |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Untuk $\lambda = 1$ diperoleh $\|e^{At} - I_n\|_2 \geq 1$.

Karena

$$0 \in F(e^{At}), \quad 0 \in e^{-kt} F(e^{At}) = F(e^{At-ktI_n}),$$

Untuk setiap $k \in \mathbb{C}$.

Oleh karena itu

$$\|e^{At-ktI_n} - I_n\|_2 \leq 1$$

Diperoleh hubungan

$$\|e^{X+Y} - e^X\|_2 \leq (e^{\|Y\|_2} - 1)e^{\|X\|_2},$$

di mana X, Y adalah matriks persegi dengan ukuran yang sama. Untuk $Y = At - ktI_n$ dan $X = 0$, ketaksamaan menjadi

$$\|e^{At-ktI_n} - I_n\|_2 \leq \|e^{At-ktI_n}\|_2 - 1 \quad (14)$$

Menggabungkan ketaksamaan (7) dan (8) diperoleh $1 \leq \|e^{At-ktI_n}\|_2 - 1$, atau

$\ln 2 \leq |t| \|A - kI_n\|_2$, ketaksamaan pada teorema (6) terbukti.

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian ini diperoleh kesimpulan

1. Rataan geometric dua matriks definit positif $A, B \in M_n$ didefinisikan dengan

$$A \# B = B^{\frac{1}{2}} \left(B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}. \text{ Untuk } A, B \geq 0$$

dengan batas atas dinyatakan dalam bentuk

$$A \# B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A + \varepsilon I_n) \# (B + \varepsilon I_n)$$

Ketaksamaan Non komutatif AM - GM

$$\text{dirumuskan dalam bentuk } \frac{A+B}{2} \geq A \# B$$

$$s_j(\Phi(X)) \leq s_j(\Phi(A \# B)), j = 1, \dots, n$$

2. Fungsi eksponensial matriks diperoleh dari Solusi persamaan

$$x' = Ax \text{ dalam bentuk } x(t) = e^{At} x_0 = e^{(A-\lambda I)t} e^{\lambda t} x_0 = e^{(A-\lambda I)t} e^{\lambda t} x_0$$

$$= [I + (A - \lambda I)t + (A - \lambda I)^2 \frac{t^2}{2!} + \dots] e^{\lambda t} x_0$$

$$x(t) = [I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda I)^k}{k!} t^k] e^{\lambda t} x_0$$

3. Suatu rentang numerik dari operator T yang merupakan subset dari bilangan kompleks $\mathbb{C}$

dalam bentuk:

$$W(T) = \{(T_{xx}), x \in H, \|x\|=1\}$$

diperoleh hubungan

$$W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T),$$

untuk $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dan

$$W(T^*) = \{\lambda, \dots, \lambda_n\} \in W(T) \text{ serta}$$

$$W(U^* T U) = W(T) \text{ untuk suatu matrik}$$

Unitary U .

4. Untuk suatu matriks Hermitian H , maka

$$W(H) = \{t: \lambda_1 \leq t \leq \lambda_n\} \quad (14)$$

dimana λ_1 dan λ_n merupakan eigen value terkecil dan terbesar dari Matriks H dan jika $\|v\| = 1$ dan $\|H_{vv}\| = \lambda_n$, maka v merupakan eigenvektor yang berkoresponden dengan λ_n .

DAFTAR PUSTAKA

- Apostol, T. M. 1969. *Calculus. Vol. II, Second Ed.* New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Bhatia, R. 2007. *Positive Definite Matrices.* Princeton: Princeton University Press.
- Bhatia, R dan Kittaneh. F. 2008. *The matrix arithmetic geometric mean inequality revisited. Linear Algebra applications.* Princeton: Princeton University Press,
- Chorianopoulos, C. dan Guo, C. -H. 2016. Numerical range for the matrix exponential function. *Electronic Journal of Linear Algebra.*
- Chorianopoulos, C. Psarrakos, P. dan Uhlig, F. 2010. A method for the inverse numerical range problem. *Electronic Journal of Linear Algebra.*
- Li, C. K. dan Rodman, L. 1997. Numerical range of matrix polynomials. *SIAM Journal on Matrix. Analysis and Applications.*

- Lin, M. 2014. *A Completely PPT Map*. Linear Algebra applications.
- Lin, M. 2016. A Singular Value Inequality Related to Linear Map. *Electronic Journal of Linear Algebra*.
- Petersen, P. 2012. *Linear Algebra*. New York: Springer.
- Zhang, F . 2005 *The Schur Complement and Its Applications*, Springer Science Business Media, Inc.