

ALTERNATIVE METHODS FOR SOLVING $X' = AX$

Muhammad Natsir

Department of Mathematics Faculty of Mathematics and Natural Science
Riau of University
natsir100@gmail.com

Abstract

The solution of $x' = Ax$ which is $x(t) = e^{At}x_0 = Pe^{At}P^{-1}x_0 = c_1v_1e^{\lambda_1t} + \dots + c_nv_ne^{\lambda_nt}$, involves the computation of eigenvectors $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, modal matrices $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, and their transformation $P^{-1}AP = J$, the Jordan canonical form. For the case distinct eigenvalue $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ solution of $x' = Ax$ is then

$$x(t) = e^{At}x_0 = \sum_{k=1}^n Z_k e^{\lambda_k t} x_0 \text{ where } Z_k = \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{(A - \lambda_j I)}{\lambda_k - \lambda_j} \text{ and } e^{At} = \sum_{k=1}^n Z_k e^{\lambda_k t}. \text{ To by pass such}$$

computations, several alternative methods have been suggested, some of which are the Putzer's Methods and a Direct method of solving $x' = Ax$

keywords : eigen vectors, matrices, putzer's methods

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial yang memuat turunan fungsi satu variabel muncul hampir disetiap cabang matematika, suatu fenomena yang mengekspresikan setiap situasi fisik yang berhubungan dengan kecepatan perubahan satu variabel terhadap variabel lainnya akan menuju ke suatu persamaan diferensial dan situasi seperti ini sangat biasa dijumpai.

Kecepatan perubahan y terhadap x yang sebanding dengan y diilustrasikan dan diformulasikan dalam bentuk persamaan

$\frac{dy}{dx} = y$, yang menghasilkan penyelesaian $y = Ce^x$, untuk sembarang konstanta C .

Bentuk umum persamaan differensial linier adalah $x' = Ax$ atau $x'(t) = Ax(t)$ dengan $x(t) = e^{At}x_0 = Pe^{At}P^{-1}x_0 = c_1v_1e^{\lambda_1t} + \dots + c_nv_ne^{\lambda_nt}$ berupa n -vektor dan A matriks konstan berukuran $n \times n$ dengan $x(0) = x_0$.

Solusi umum dari persamaan differensial $x'(t) = Ax(t)$ adalah $x(t) = e^{At}x_0$, dimana e^{At} adalah matriks eksponensial yang dapat diekspresikan melalui perluasan fungsi matriks

Eksponensial matriks merupakan deret dari fungsi eksponensial yang konstantanya

diganti menjadi matriks A berukuran $n \times n$, sehingga terbentuklah deret matriks A berukuran $n \times n$. Suatu deret matriks dapat diperluas berdasarkan Teorema Cayley-Hamilton yang menguraikan polynomial nilai eigen dari suatu matriks A $n \times n$ kedalam bentuk polinomial matriks A $n \times n$.

Penelitian ini menelusuri lebih mendalam tentang beberapa metode penyelesaian persamaan $x' = Ax$ yaitu Metode Sylvester's, metode Putzer's dan metode langsung.

Penelusuran Literature tentang materi yang berkaitan dengan eksponen matriks memberikan informasi yang diperlukan dalam menganalisa perumusan dari eksponen matriks baik dari segi penelaahan nilai eigen dari matriks A tersebut maupun tinjauan tentang solusi dari sistem persamaan diferensial linier yang dibangun oleh A $n \times n$ sebagai matriks koefisien sistem linier tersebut.

Perumusan tentang eksponensial dari suatu matriks persegi sebelumnya dijabarkan melalui perluasan fungsi matriks A yang mempunyai eigen value $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ yang diformulasikan dalam bentuk:

$$F(A) = \frac{(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} F(\lambda_1) + \frac{(A - \lambda_1 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} F(\lambda_2)$$

, untuk matriks $A_{2 \times 2}$

$$F(A) = \frac{(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} f(\lambda_1)$$

$$+ \frac{(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_1 I)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} F(\lambda_2)$$

$$+ \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} F(\lambda_3)$$

untuk matriks $A_{3 \times 3}$

[1]

1. Nilai Eigen dan Teorema Cayley-Hamilton

Dibagian ini dijelaskan pengertian nilai eigen dan vektor eigen untuk menjelaskan teorema Cayley-Hamilton.

○ Definisi 1

Skalar λ disebut nilai eigen, bila $AX = \lambda x$ untuk $x \neq 0$ dengan matriks A $n \times n$ dan X adalah vektor eigen. Selanjutnya dapat dibentuk

$(\lambda I - A)X = 0$ dan $\det(\lambda I - A) = 0$, diperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

○ Definisi 2

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari matriks A ordo $n \times n$, maka dapat dibentuk polinomial nilai eigen, $P(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ [2]

• Teorema 1 [5] (Teorema Cayley-Hamilton)

Misalkan A matriks $n \times n$ dan $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ adalah nilai-nilai eigennya.

Jika polinomial nilai eigen matriks A :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) \\ = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

Maka diperoleh

$$P(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + A^n = 0 \quad [3]$$

2. Solusi Sistem Persamaan Differensial Linear

Homogen dengan Koefisien Konstan

Bentuk sistem persamaan differensial linear homogen dengan koefisien konstan dirumuskan,

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad [4]$$

dengan titik asal,

$$\begin{pmatrix} x_1'(0) \\ x_1''(0) \\ \vdots \\ x_1^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_2^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n(0) \\ x_n'(0) \\ \vdots \\ x_n^{(n)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad [5]$$

Secara singkat persamaan (4) dan (5) dapat ditulis dalam bentuk $X'(t) = AX(t)$ [6]

dengan nilai asal, $X(0) = x$ [7]

Solusi umum persamaan (6) dinyatakan sebagai

$$x(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \dots + a_n\varphi_n(t) \\ = a_1e^{\lambda_1 t} + a_2e^{\lambda_2 t} + \dots + a_ne^{\lambda_n t} \quad [8]$$

Selanjutnya diasumsikan persamaan (8) adalah solusi persamaan linier homogen orde- n dengan koefisien konstan, yaitu

$$: X^{(n)} + e_{n-1}X^{n-1} + \dots + e_1X' + e_0X = 0 \quad [9]$$

dengan syarat, $x_k^{(k-1)} = 1$ dan $x_k^{(i)}(0) = 0$

untuk $1 \neq k-1$, $0 \leq i \leq n-1$

Dari persamaan (9) dapat diketahui terdapat n solusi eksak dan ditulis [2],

$$S = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\} \quad [10]$$

persamaan (10) adalah suatu basis pada vektor fungsi turunan. Oleh karena itu, dari persamaan (10) dapat dibentuk matriks yang non singular, yaitu:

$$B_t = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_1^{(n-1)}(t) \\ \varphi_2(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_2^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(t) & \varphi_n'(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad [11]$$

3. Eksponensial matriks

Berikutnya dijelaskan eksponensial matriks adalah sebuah solusi khusus dari sistem persamaan linier dari sistem persamaan linier homogen pada teorema dibawah ini.

- **Teorema 2.** Jika A matriks konstan $n \times n$ konstan dengan polinomial karakteristik

$P(\lambda)$, maka eksponensial matriksnya adalah:

$$e^{At} = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \dots + x_n(t)A^{(n-1)} \quad [12]$$

dengan,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = B_0^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

B_0 adalah matriks persamaan (10) untuk $t = 0$ dan $S = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ adalah basis solusi sistem persamaan differensial homogen yang persamaan karakteristiknya adalah persamaan karakteristik dari matriks A dengan $p(\lambda) = 0$.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini berbentuk studi literatur dengan menelusuri beberapa buku teks dan journal terkait untuk menganalisa lebih lanjut tentang penyelesaian persamaan $x' = Ax$ dengan metode Sylvester's, metode Putzer's dan metode langsung dengan pendekatan dan langkah-langkah berikut:

1. Tentukan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dari matriks A yang diketahui.
2. Formulasikan

$$x(t) = e^{At} x_0 = \sum_{k=0}^n Z_k e^{\lambda_k t} x_0 \text{ dimana}$$

$$Z_0 = \prod_{j=1, j \neq k} \frac{(A - \lambda_j I)}{\lambda_k - \lambda_j} \text{ dan } e^{At} = \sum_{k=1}^n Z_k e^{\lambda_k t}$$

[Metode Sylvester's]

3. Formulasikan $e^{At} = \sum_{j=1}^{n-1} q_j(t)A^j$, dimana

$q_0(t), q_1(t), \dots, q_{n-1}(t)$ merupakan elemen dari vektor kolom $q = CZ$, dimana merupakan elemen dari vektor kolom $q = CZ$, dimana

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 1 \\ c_2 & c_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z^1(t) \\ \dots \\ z^{n-1}(t) \end{bmatrix}, \text{ [Metode Pertama Putzer's]}$$

4. Formulasikan $e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)p_j$, dimana

$P_0 = I$; $P_j = \prod_{k=1}^j (A - \lambda_k I)$ dengan $r_1(t), \dots, r_n(t)$ merupakan solusi dari

$$\text{sistem} \begin{cases} r_1 = \lambda r_{11} \\ r^1_j = r_{j-1} + \lambda_j r_j, \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ r_1(0) = 1; r_j^*(0) = 0 \end{cases}$$

[Metode kedua Putzer's]

5. Rumuskan $x(t) = [I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda I)^k}{k!} t^k] e^{\lambda t} x_0$,

[Metode Langsung]

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelusuran Literature tentang materi yang berkaitan dengan eksponen matriks memberikan informasi yang diperlukan dalam menganalisa perumusan dari eksponen matriks baik dari segi penelaahan nilai eigen dari matriks A tersebut maupun tinjauan tentang solusi dari sistem persamaan diferensial linier yang dibangun oleh $A_{n \times n}$ sebagai matriks koefisien sistem linier tersebut.

Perumusan tentang eksponensial dari suatu matriks persegi sebelumnya dijabarkan melalui perluasan fungsi matriks A yang mempunyai eigen value $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ yang diformulasikan dalam bentuk:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^n Z_k e^{\lambda_k t} \quad \text{dan}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 = \sum_{k=0}^n Z_k e^{\lambda_k t} x_0,$$

$$\text{dimana } Z_0 = \prod_{j=1, j \neq k} \frac{(A - \lambda_j I)}{\lambda_k - \lambda_j}$$

- Sebagai ilustrasi, Selesaikan persamaan $x' =$

$$Ax, \text{ dengan } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$.
menghasilkan $\lambda = \{-1, -2\}$

Maka

$$Z_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix};$$

$$Z_1 x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$Z_2 x_0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Sehingga penyelesaian dari persamaan
 $x' = Ax$ adalah

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^2 Z_k e^{\lambda_k t} x_0 = e^{-t} Z_1 x_0 + e^{-2t} Z_2 x_0 \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jika dibandingkan dengan cara biasa, dari
nilai eigen $\lambda = \{-1, -2\}$
diperoleh matriks P yang dibentuk oleh
eigenvektor $[v_1, v_2]$,

$$\begin{aligned} \text{sehingga } P = [v_1, v_2] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} P^{-1} x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

diperoleh hubungan $Z_1 x_0 = c_1 v_1$ dan $Z_2 x_0$
 $= c_2 v_2$

Jadi solusi persamaan

$$\begin{aligned} x(t) &= P e^{At} P^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \end{aligned}$$

Tinjau suatu matriks A berukuran 3×3 yang
mempunyai akar berulang dengan polinomial
karakteristik Sebagai ilustrasi untuk metode
pertama Putzer's

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \lambda)^3 \\ &= x^3 - 3x^2\lambda + 3x\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

$$= x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

diperoleh hubungan $c_0 = -\lambda^3 = \det A$,

$$c_2 = -3\lambda = -\text{Tr } A,$$

$$c_1 = 3\lambda^2$$

= jumlah dari hasil kali
dua nilai eigennya

Untuk metode i Putzer's diperoleh

$$q = CZ = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ c_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ 1 \\ z \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \lambda^2 - 2\lambda t + 2 \\ -2\lambda t^2 + 2t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

Jadi penyelesaiannya adalah

$$x(t) = e^{At} x_0 = \frac{1}{2} e^{\lambda t} [q_1 I + q_2 A + q_3 A^2] x_0$$

Sedangkan untuk metode kedua Putzer's,
diperoleh persamaan:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \\ 1 \\ r_2 \\ 1 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \text{ Jadi } \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

Jadi penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 = \frac{1}{2} e^{\lambda t} [2I + 2t(A - \lambda I) \\ &+ t^2(A - \lambda I)^2] x_0 \end{aligned}$$

Untuk metode langsung, solusi persamaan

$x' = Ax$ adalah

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 = e^{(A-\lambda I)t} e^{\lambda t} x_0 = e^{(A-\lambda I)t} e^{\lambda t} x_0 \\ &= [I + (A - \lambda I)t + (A - \lambda I)^2 \frac{t^2}{2!} + \dots] e^{\lambda t} x_0 \end{aligned}$$

$$x(t) = [I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda I)^k}{k!} t^k] e^{\lambda t} x_0$$

KESIMPULAN

Hasil penelitian dalam bentuk penelusuran
penyelesaian persamaan $x' = Ax$ dapat ditarik
beberapa kesimpulan:

1. Penggunaan Metode Putzer's menghasilkan perumusan yang lebih efisien digunakan untuk kasus nilai eigen yang berulang
2. Penggunaan Metode Putzer's didapat hasil eksak dengan menggunakan definisi e^{At}
3. Hasil perbandingan metode Sylvester's dan metode Langsung diperoleh hubungan $Z_1 x_0 = c_1 v_1$ dan $Z_2 x_0 = c_2 v_2$

DAFTAR ACUAN

- Antan H. 1984. *Elementary Linear Algebra*, J, Wiley & Sons , New York
- Aston, H.& C. Rorres. 1984. *Elementary Linear Algebra with Applications* . New York: Wiley & Sons.
- Coddington , E,A , & Levinson , 1955 , *Theory of Ordinary Differential Equations* . Mc Graw-Hill , New York .
- Jack,L.G.1991.*Matrix theory with application*. Mc Graw Hill,New York
- Leonard, I.E.1996., The matrix exponential. *SIAM Rev.*, 38 : 507–512.
- Liz, E. 1998., *A Note on the matrix exponential*. *SIAM Rev.*, 40 : 700–702.
- Piere N,V. Tu , 1994 , *Dynamical Systems* , Springer Verlag , New York.